فصل اول

سري فوريه و انتگرال فوريه

فوريه دانشمندي بود كه نظريه سري فوريه و انتگرال فوريه را بنيانگذاري نمود . اين دو مسئله همواره به عنوان دو مسئله بنيادي در رياضيات كاربردي مطرح مي شود .

اصل سري فوريه و انتگرال فوريه : از تعريف توابعي به نام توابع متعامد حاصل مي شود .

توابع متعامد (عمود بر هم) : دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را بر هم عمود يا متعامد ناميم اگر داشته باشيم :

در حالت كلي كه توابع f و g مختلط هستند داريم : (f و g در بازه a و b متعامدند)

$$\int_a^b f(x).\, g^*(x)dx = 0$$

مثال 1 – آيا توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در بازه π- و π برهم عمودند ؟

$$\int_{\pi\pi}^{\pi} f(x).\, g(x)dx = \int_{\pi\pi} \sin x\, .\cos x dx = \int_{-\pi} \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = 0$$

مثال 2- آيا توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در بازه [0 و 2π] متعامدند ؟ ($Zn\ \&\ m\in$)

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, .\cos x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{\sin(n+m)\,x + \sin(n-m)\,x\}\, dx = \frac{1}{2}\{\int_0^{2\pi} \sin(n+m)\,x dx + \int_0^{2\pi} \sin(n-m)\,x\, dx\} = 0$$

قضيه سري فوريه : فوريه نشان داد كه مي توان هر تابع متناوب را به مجموعه اي از بي نهايت تابع متناوب و متعامد بسط داد .

$f(x)= \sum$ متعامد و متناوب توابع

در اين سري توابع متعامد همان توابع سينوسي و كسينوسي تعريف مي گردند . فرمول بسط سري فوريه به شكل زير است :

$$\mathbf{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}\right)}$$

فرض كنيد دوره تناوب تابع$f(x)$مقدار 2π باشد در نتيجه داريم :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos x + b_2 \sin x + \cdots \dots \dots .$$

نكته : به عدد $\frac{a_0}{2}$ اصطلاحا سطح متوسط سيگنال يا سطح DC سيگنال گفته مي شود .

نكته : ضرايب $\frac{a_0}{2}$ و a_1و b_1و .... (b_n وa_n) به عنوان ضرايب مجهول در سري فوريه مطرح مي شود . منظور از محاسبه سري فوريه يك تابع محاسبه اين ضرايب ($\frac{a_0}{2}$ وa_n و b_n) و قرار دادن آن در فرمول سري فوريه مي باشد .

نكته : مي توان نشان داد كه مي توان اين ضرايب را از سه فرمول زير بدست آورد :

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x).\cos\frac{2\pi nx}{T}dx}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x).\sin\frac{2\pi nx}{T}dx}$$

سري فوريه از ديدگاه برق : تجزيه يك سيگنال به مجموعه اي از توابع سينوسي و كسينوسي .

مراحل محاسبه سري فوريه :

الف) تشخيص دوره تناوب

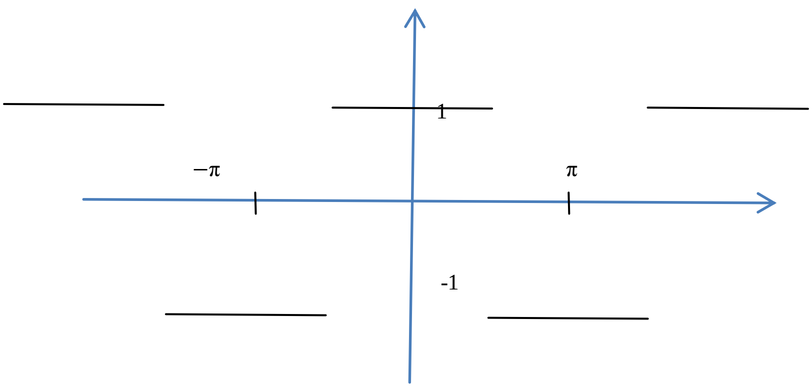
ب) تشخيص سيگنال DC

ج) تعيين دوره تناوب

د) محاسبه a_0 و a_n و b_n

ه) قرار دادن a_0 و a_n و b_n در فرمول سري فوريه

مثال 3- مطلوبست محاسبه سري فوريه تابع زير ؟



$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x).\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{2\pi} f(x).\cos\frac{2\pi nx}{2\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\{\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos nx\,dx = \frac{4}{n\pi}\ .\ \sin\frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(x).\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx = \frac{2}{2\pi}\int_{2\pi} f(x).\sin\frac{2\pi nx}{2\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\{\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\ nx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\ nx\,dx = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\ .\sin\frac{n\pi}{2}\right)\ \cos nx$$

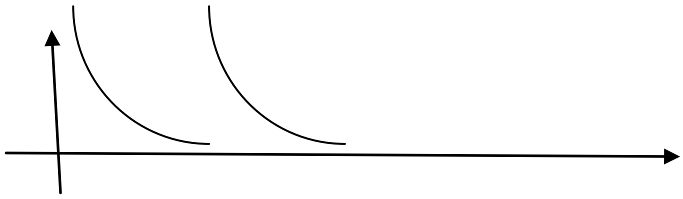
با مقدار دادن به n از 1 تا ∞ مقداري براي f(x) حاصل مي شود كه به هارمونيك هاي سيگنال اصلي معروف هستند . در مثال فوق هارمونيك هاي زوج برابر صفر و هارمونيك هاي فرد مقدار دارند .

فوريه نشان داد مجموع توابع سينوسي و كسينوسي در بسط فوق در بي نهايت به تابع f(x) ميل مي كند .

نكته : به جمله اي كه در بسط سري فوريه داراي فركانس برابر با فركانس f(x) است هارمونيك اول (اصلي) بسط سري فوريه گويند . در سري فوريه فوق جمله اول هارمونيك اول و جملات بعدي به ترتيب هارمونيك هاي سوم و پنجم و .... هستند .

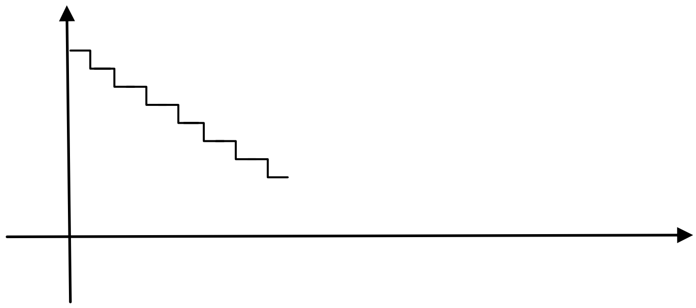
شرايط دريكله : دريكله شرايط نوشتن سري فوريه را براي توابع متناوب تحقيق نمود . در اين تحقيق مشخص شد كه همه توابع متناوب سري فوريه ندارند. به طور كلي توابعي كه داراي شرايط زير نباشند داراي سري فوريه هستند :

الف) اگر تابع f(x) در يك دوره تناوب مطلقا انتگرال پذير نباشد .



ب) اگر تابع داراي ماكزيمم يا مينيمم هاي نامحدود باشد . $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

ج) اگر تابع داراي ناپيوستگي نامحدود باشد .



بنابراين در صورتي كه تابعي هيچ يك از سه محدوديت فوق را نداشته باشد داراي سري فوريه است .

حالات خاص سري فوريه :

الف) اگر f(x) **زوج** باشد واضح است كه ضريب b_n **صفر** است . بنابراين فقط كافي است ضرايب a_0 و a_n را محاسبه كنيم . در اين حالت داريم :

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx$$

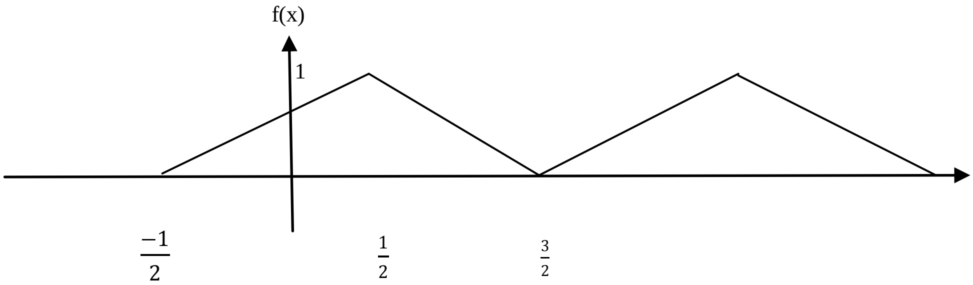
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,.\,\cos\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x \;\; dx$$

ب) اگر f(x) **فرد**باشد واضح است كه **ضرايب a_0 و a_n صفر** هستند در نتيجه داريم :

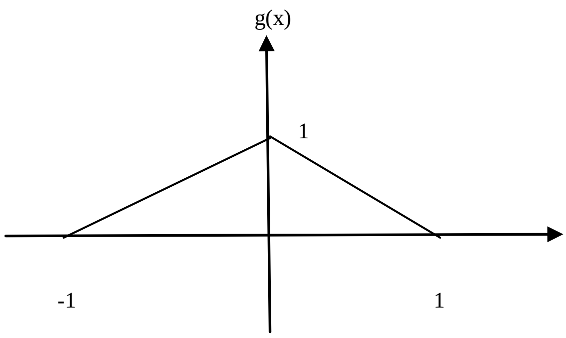
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\;.\;\sin\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x \; dx$$

نكته : در بعضي از مسائل كه تابع نه زوج و نه فرد است مي توان با انتقال (شيفت) مناسب تابع به سمت راست يا چپ اين تابع را به يك تابع زوج يا فرد تبديل نمود .

مثال 4 – سري فوريه تابع زير را بدست آوريد ؟



با شيفت به چپ داريم :



حال كافي است سري فوريه تابع g(x) را بدست آوريم و چون اين تابع زوج است b_n صفر است و داريم :

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(x)dx = \frac{4}{2}\int_0^{2/2}(1-x)dx = 2\int_0^1 (1-x)dx = 1$$

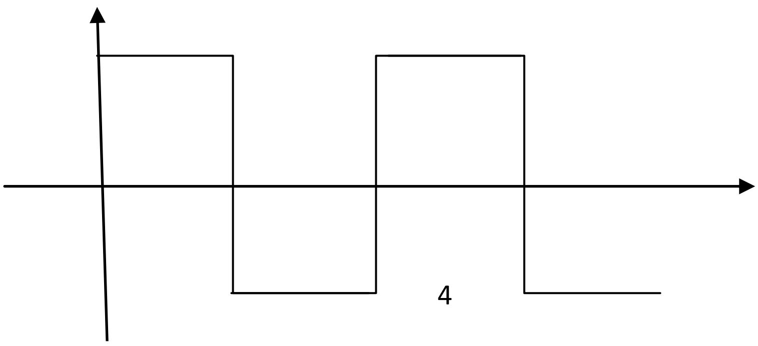
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(x)\,.\cos\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\cos(\pi n)\,x\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\quad(1-\cos n\pi)$$

$$g(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\ \cos n\,\pi x\right)$$

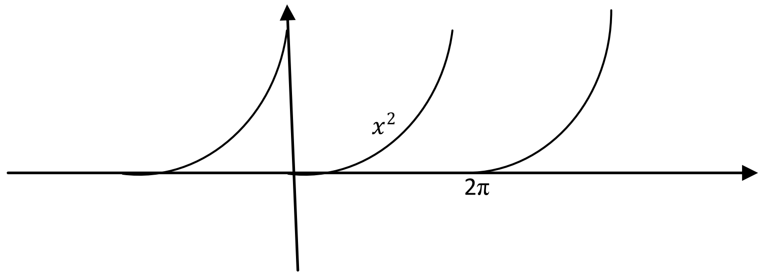
$$g(x)=1-x \ \Rightarrow f(x)=g(x-\tfrac{1}{2})$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n\ \text{فرد}}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\ \cos[\,n\,\pi(x-\tfrac{1}{2})]$$

قضيه پيوستگي در سري فوريه : سري فوريه هر تابع متناوب در هر نقطه پيوستگي تابع به خود تابع و در هر نقطه ناپيوستگي تابع به ميانگين حد چپ و راست تابع همگرا مي باشد .



مثال 5- اولا سري فوريه تابع زير را محاسبه كنيد ؟ ثانيا با استفاده از پاسخ حاصله مقدار سري $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ را بدست آوريد ؟



اولا :

$$a_0=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\ \cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2\ \sin nx\,dx=\frac{-4\pi}{n}$$

$$f(x)=\frac{8\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\mathrm{n}^2}\cos \mathrm{nx}-\frac{4\pi}{n}\sin \mathrm{nx}\right)$$

ثانيا :

$$\mathrm{f}(0)=\frac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2$$

$$\Rightarrow f(0)=\frac{8\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\mathrm{n}^2}=2\pi^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

تعيين سري فوريه براي توابع غير متناوب : همانطور كه قبلا بيان شد سري فوريه را مي توان براي توابع متناوب تعريف نمود . اما براي توابع غير متناوب نيز مي توان به روشهاي زير سري فوريه تعريف نمود :

روش اول : تابع را به شكل زوج متناوب مي كنيم (تابع زوج : قرينه نسبت به محور y ها)

با توجه به اينكه اين تابع زوج است ضرايب b_n آن صفر است و اصطلاحا مي گويند براي اين تابع **<u>بسط (سري) نيم دامنه كسينوسي</u>** نوشته شده است .

روش دوم : تابع را به شكل فرد متناوب مي كنيم (تابع فرد : قرينه نسبت به مبدا مختصات)

در اين حالت ضرايب a_0 و a_n صفر است و اصطلاحا گفته مي شود براي اين تابع **<u>بسط (سري) نيم دامنه سينوسي</u>** نوشته شده است .

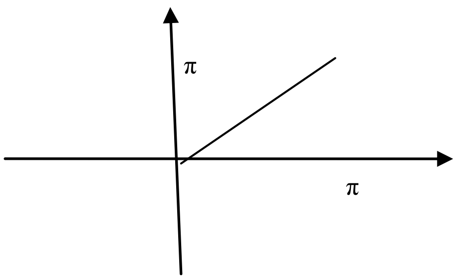
روش سوم : متناوب كردن تابع به صورت يك تابع نه زوج و نه فرد .

با توجه به حجم محاسبات راحتترين روش – روش دوم است (در صورتيكه حل مسئله به خودمان واگذار شود)

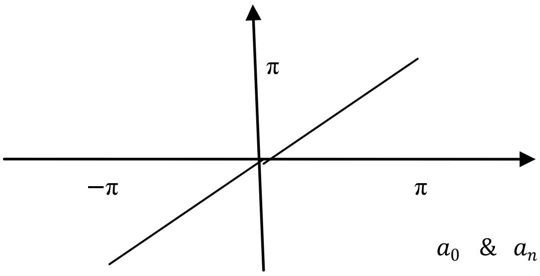
روش چهارم : هر تابع غير متناوب را مي توان يك تابع متناوب با دوره تناوب بي نهايت در نظر گرفت .

بنابراين مي توان در سري فوريه T را به سمت بي نهايت ميل دهيم .با ميل كردن T به سمت بي نهايت سري فوريه به انتگرال فوريه تبديل مي شود .

مثال 6 – براي تابع غير متناوب زير سري فوريه متناظر را بيابيد ؟



چون اين تابع متناوب نيست مي توان آنرا به يكي از روسهاي سه گانه فوق متناوب نمود . با توجه به ساده تر بودن روش دوم از اين روش استفاده مي كنيم :

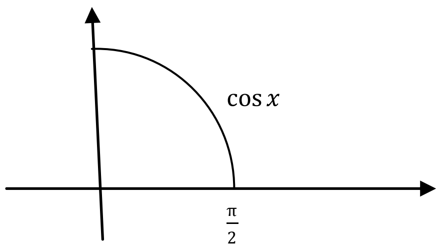


$$a_0 \;\;\&\;\; a_n = 0 \quad \& \quad T = 2\pi$$

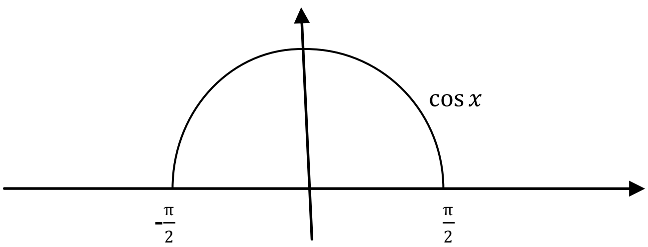
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} f(x)\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x \ \ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\ \ \sin nx \ \ dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$=> \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\ \sin nx$$

مثال 7 – بسط نيم دامنه كسينوسي تابع زير را محاسبه كنيد ؟



چون بسط نيم دامنه كسينوسي مد نظر مي باشد بايستي تابع را به صورت زوج متناوب نمود كه داريم :



$$b_n = 0 \quad \& \quad T = \pi$$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ \ dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \quad dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x \ \ dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,.\, \cos 2nx \ \ dx = \frac{4\cos n\pi}{\pi(1-4n^2)}$$

$$=> f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4\cos n\pi}{\pi(1-4n^2)} \cos 2nx \right)$$

انتگرال فوریه : همانطور که در قسمت قبل نیز بیان شد یکي از روشهاي نوشتن سري فوریه براي یك تابعغیر متناوبلین است که دوره تناوب را به سمت بي نهایت میل دهیم . در این حالت فوریه نشان داد که سري فوریه به سمت تابعي به نام انتگرال فوریه میل مي نماید . مي توان نشان داد فرمول انتگرال فوریه هنگامي که در فرمول سري فوریهT را به بي نهایت میل مي دهیم به صورت زیر خواهد بود :

$$\mathbf{f(x)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\}d\,\omega$$

که ضرایب $A(\omega)$ و $B(\omega)$ از فرمول هاي زیر قابل محاسبه هستند :

$$\mathbf{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos\omega x \quad dx$$

$$\mathbf{B}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \sin\omega x \quad dx$$

حالات خاص انتگرال فوریه :

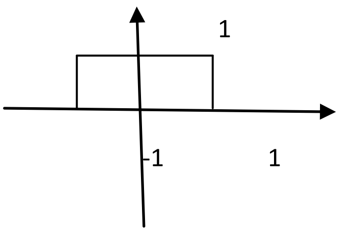
الف) اگر f(x) تابعي فرد باشد آنگاه $A(\omega)$ صفر است و داریم :

$$\mathbf{B}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \sin\omega x \quad dx$$

الف) اگر f(x) تابعي زوج باشد آنگاه $B(\omega)$ صفر است و داریم :

$$\mathbf{A}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos\omega x \quad dx$$

مثال 8 – الف : انتگرال فوریه تابع زیر را بیابید ؟ ب : با توجه به پاسخ انتگرال فوریه حاصله جواب انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$ چیست ؟



این تابع زوج است پس داریم : $B(\omega) = 0$

$$A(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos\omega x\ dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\ \cos\omega x\ dx = 2\{\int_{0}^{1}\cos\omega x\ \ dx + \int_{1}^{\infty} 0 * \cos\omega x\ \ dx\} = \frac{2}{\omega}\sin\omega$$

$$=> f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[(\frac{2}{\omega}\sin\omega)\cos\omega x]d\omega$$

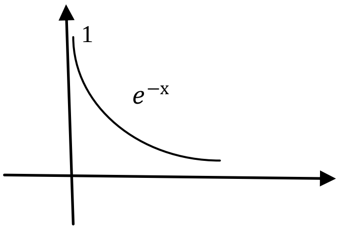
اگر به جاي x در انتگرال فوریه صفر قرار دهیم : $\cos\omega x = 1$ و در نتیجه داریم :

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\omega}\sin\omega\ \ d\omega \qquad \text{و} \qquad f(0) = 1$$

$$=> 1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\ \ d\omega \qquad => \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$$

قضيه : همگرايي انتگرال فوريه در اين بحث دقيقا مشابه بحث همگرايي سري فوريه است يعني انتگرال فوريه در هر نقطه پيوستگي به مقدار تابع و در هر نقطه ناپيوستگي به ميانگين حد چپ و راست تابع ميل مي كند .

مثال 9 – الف : انتگرال فوريه تابع زير را محاسبه كنيد ؟ ب: با استفاده از پاسخ حاصله جواب $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du$ را محاسبه كنيد ؟



الف :

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\ dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,\frac{e^{j\omega x}+e^{-j\omega x}}{2}\ dx=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\ \ dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,\frac{e^{j\omega x}-e^{-j\omega x}}{2j}\,dx=\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

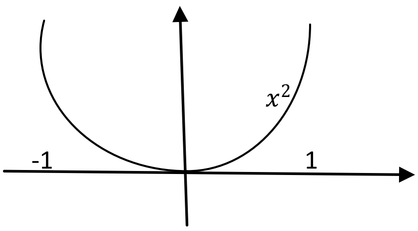
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{A(\omega)cos\omega x+B(\omega)sin\omega x\}d\,\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\cos\,\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega\,\sin\,\omega}{1+\omega^2}\right]d\omega$$

ب : با قرار دادن $x=0$ و محاسبه $f(0)$ در انتگرال فوريه داريم :

$$f(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad و \qquad f(0)=1$$

$$=>\ \ 1=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad => \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\pi$$

مثال 10 – انتگرال فوريه تابع زير را محاسبه كنيد ؟



تابع زوج است پس $B(\omega)=0$ و داريم :

$$A(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\ \ dx=2\int_{0}^{1} x^2\cos\omega x\,dx=2\left[\frac{sin\omega}{\omega}+\frac{2cos\omega}{\omega^2}-\frac{2sin\omega}{\omega^3}\right]$$

$$=>\ \ f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\left[\frac{sin\omega}{\omega}+\frac{2cos\omega}{\omega^2}-\frac{2sin\omega}{\omega^3}\right]cos\omega x\quad d\omega$$

خلاصه :

سري فوريه :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T}\right)$$

ضرايب سري فوريه :

$$a_0=\frac{2}{T}\int_T f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(x).\cos\frac{2\pi nx}{T}dx$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_T f(x).\sin\frac{2\pi nx}{T}dx$$

حالات خاص سري فوريه :

1 - f(x) زوج $\Leftarrow$ $b_n=0$

$$a_0=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x).\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x\ \ dx$$

2 - f(x) فرد $\Leftarrow$ a_0 & $a_n=0$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(x)\ .\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}n\right)x\ dx$$

انتگرال فوريه :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{A(\omega)cos\omega x+B(\omega)sin\omega x\}d\,\omega$$

ضرايب انتگرال فوريه :

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ \cos\omega x\ \ dx$$

$$B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ \sin\omega x\ \ dx$$

حالات خاص انتگرال فوريه :

1 - f(x) زوج

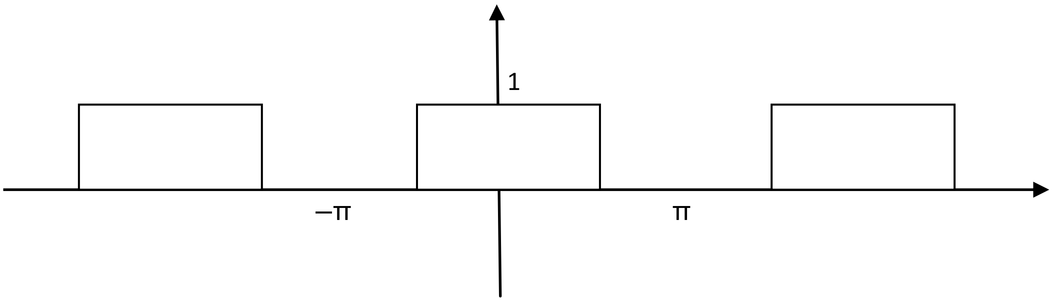
$$A(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ \cos\omega x\ \ dx$$

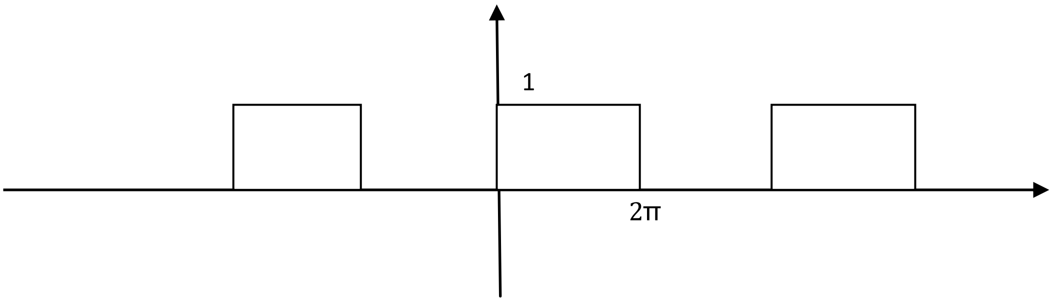
2 - f(x) فرد

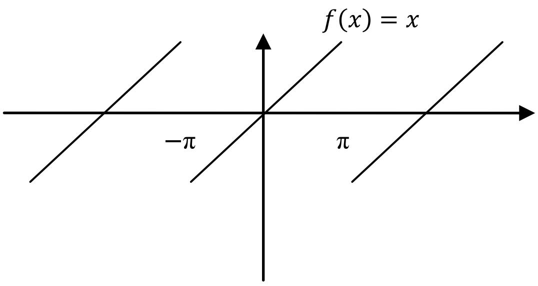
$$B(\omega)=2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\ \sin\omega x\ \ dx$$

تمرینات آخر فصل :

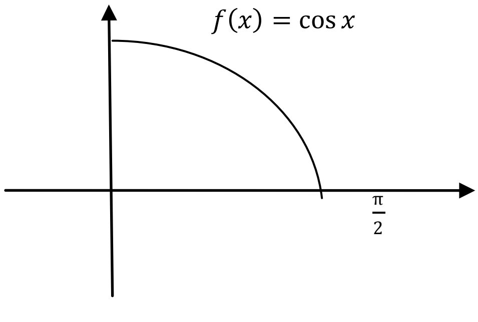
مطلوبست محاسبه سري فوريه توابع زير ؟



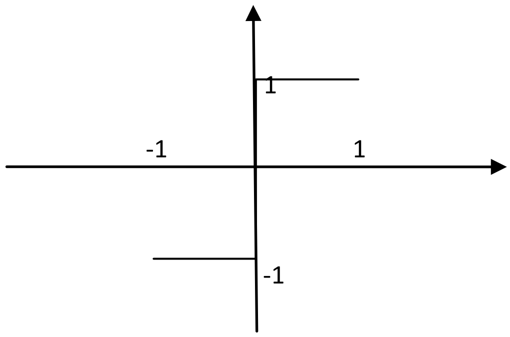


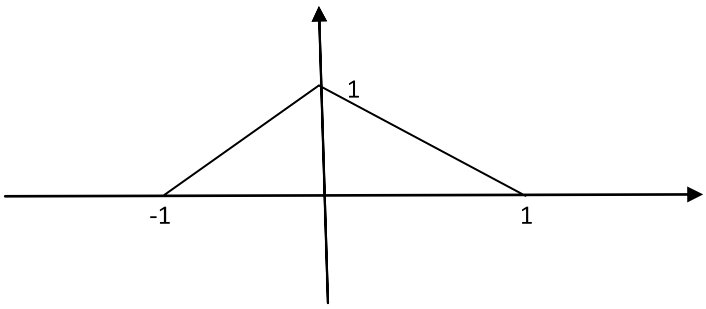


بسط نيم دامنه سينوسي تابع زير را بيابيد ؟



مطلوبست محاسبه انتگرال فوریه توابع زیر ؟





فصل دوم

حل معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه دوم

در درس معادلات ديفرانسيل با حل مسائل متنوعي از معادلات ديفرانسيل آشنا شديم . همانطور كه مي دانيم يك معادله ديفرانسيل عبارتست از y و y' و y'' و ...... با تابعي از x كه يك معادله را تشكيل مي دهد . منظور از حل يك معادله ديفرانسيل يافتن تابع y است .مثلا يك معادله ديفرانسيل به صورت زير است :

$$y'' + 5y' + 3y = \cos x$$

يادآوري 1 – يك معادله ديفرانسيل خطي مرتبه اول به صورت زير است :

$$\boldsymbol{y' + p(x) = q(x)}$$

همانطور كه مي دانيم جواب معادله فوق به صورت زير قابل محاسبه است :

$$\boldsymbol{y = e^{-\int p(x)dx}\{\int q(x)\ e^{\int p(x)dx}\ \ dx + c\}}$$

يادآوري 2 – يك معدله ديفرانسيل خطي مرتبه دوم با ضرايب ثابت همگن به صورت زير است :

$$y'' + ay' + by = 0$$

A) $\Delta > 0 \quad => \quad \boldsymbol{s_1} \ \& \ \boldsymbol{s_2}$ ريشه ها برابر $\quad => \quad y = \boldsymbol{c_1 e^{xs_1} + c_2 e^{xs_2}}$

B) $\Delta = \boldsymbol{0} \quad => \quad s$ برابر ريشه $\quad => \quad y = \boldsymbol{c_1 e^{sx} + c_2 x e^{sx}}$

C) $\Delta < 0 \quad \alpha \pm j\beta \quad => \quad y = \boldsymbol{e^{\alpha}\{c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\}}$

مثال 1 – جوابهاي معادلات زير را بيابيد ؟

1) $y'' + 2y' + y = 0$
2) $y'' + y' + y = 0$
3) $y' + x = 0$
4) $y' + 2xy = x$

حل : طبق دو يادآوري فوق مي توان پاسخ سؤالات را داد . بنابراين داريم :

1- $y'' + 2y' + y = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 * 1 * 1 = 0 \quad => \quad s = -1$$

$$=> \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

2- $y'' + y' + y = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 * 1 * 1 = -3 \quad => \quad s_1 \& s_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$$

3- $y' + x = 0$

$$y' = -x \;\; => \;\; \frac{dy}{dx} = -x \;\;\; => dy = -x\,dx \;\; => \;\; y = -\frac{x^2}{2} + c$$

4- $y' = 2xy = x$

$$y = \boldsymbol{e}^{-\int \mathbf{2xdx}}\{\int \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{e}^{\int \mathbf{2xdx}}\;\; \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{c}\} = e^{-x^2}\{\frac{1}{2}\int xe^{x^2} 2\,dx + c$$

$$=> \quad y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

تعريف معادله ديفرانسيل مرتبه دوم با مشتقات جزيي :

در يك معادله ديفرانسيل تابع (y) تابعي فقط از يك متغير (x) است .

در بحث معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي يك تابع (u) تابعي از چندين متغير است :(.....,u(x,y,z

در اين فصل معادلاتي را مطالعه مي كنيم كه تابع شامل2 متغير باشد .

نمونه هاي زيادي از اين معادلات در كاربردهاي مهندسي وجود دارد : مثل معادله يك نخ مرتعش كه به نام**معادله موج** معروف است يا مسئله گرم شدن يك معادله كه به **معادله گرما** معروف است يا حل معادله پتانسيل الكتريكي در يك فضاي دو بعدي كه به**معادله لاپلاس** معروف است .

تعريف يك معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي :

يك معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي در حالت كلي به صورت زير تعريف مي شود :

$$F(x,y,z,\ldots,U_x, U_y, U_z, \ldots, U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, \ldots\ldots, U_{xy}, U_{yz}, U_{xz}, \ldots\ldots\ldots, U_{xxx}, U_{yyy}, U_{zzz}, \ldots\ldots)$$

$$U_X = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$U_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

به عنوان مثال نمونه هايي از معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي به صورت زير است :

1- $U_x + U_{xy} + U = 0 \quad \equiv \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + U = 0$

2- $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \tan x \frac{\partial u}{\partial y} + 2U = 5$

تعريف مرتبه يك معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي :

به بالاترين درجه مشتق گيري در يك معادله با مشتقات جزيي مرتبه آن معادله گوييم .

تعريف معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي خطي :

معادله ديفرانسيلي با مشتقات جزيي را خطي ناميم اگر اين معادله نسبت بهU و همه مشتقات آن خطي باشد .

نكته : هر عملي به جز ضرب كردن معادله را غير خطي مي كند .

همانطور كه خواهيم ديد در اين درس همه معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مورد بحث مرتبه دو– دو متغيره و خطي هستند .

فرم كلي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه 2 : به صورت زير است :

$f(x,y,U_x\,,U_y\,,U_{xx}\,,U_{yy}\,,U_{xy}\,,U) = 0$

يا مي توان اين معادلات را در حالت كلي به صورت زير نمايش داد :

$$\mathbf{A}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+B\,\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+D\,\frac{\partial U}{\partial x}+E\,\frac{\partial U}{\partial y}+FU+G=0$$

در عبارت فوق ضرايب C,B,A,... ممكن است اعداد ثابت يا توابعي از X و Y باشند . همچنين اگر G صفر باشد معادله همگن و در غير اين صورت غير همگن است .

انواع معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه دو :

مي توان اين معادلات را به 3 دسته زير تقسيم بندي نمود :

1 - معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه دو **هذلولی گون :** $\Delta = B^2 - 4AC > 0$
2 - معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه دو **سهمی گون :** $\Delta = B^2 - 4AC = 0$
3 - معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه دو **بیضی گون :** $\Delta = B^2 - 4AC < 0$

كه كاملا به ضرايب A و B و C وابسته اند .

مثال 2 – تعيين كنيد هر يك از معادلات زير جز كداميك از انواع معادلات دبفرانسيل با مشتقات جزيي هستند ؟

1- $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$
2- $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$
3- $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$
4- $e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xe^{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^{2y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+U=0$

حل : با محاسبه دلتا جهت هر كدام از مسائل فوق خواهيم داشت :

شماره 1 : همواره هذلولي گون

شماره 2 : همواره بيضي گون

شماره 3 : همواره سهمي گون

شماره 4 : از 1 تا بي نهايت و از 1- تا منفي بي نهايت هذلولي گون & بين 1 و 1- بيضي گون & روي 1 و 1- سهمي گون

روش هاي حل معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه 2 :

هدف از حل يك معادله ديفرانسيل با مشتقات جزيي محاسبه تابع U است كه در اين معادله صدق نمايد .

چهار روش مهم براي حل اين معادلات معرفي شده اند :

الف) روش فاكتورگيری : اين روش هنگامي امكان پذير است كه بتوان در معادله از يكي از عبارات $\frac{\partial}{\partial x}$ يا $\frac{\partial}{\partial y}$ فاكتور گيري نمود .

ب) روش تغيير متغير : معادله كلي $\mathbf{A}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+D\frac{\partial U}{\partial x}+E\frac{\partial U}{\partial y}+FU+G=0$ را در نظر مي گيريم . براي حل اين مسئله به كمك روش تغيير متغير معادله مشخصه زير را تشكيل مي دهيم
$Ay'^2 - By' + C = 0$. معادله مشخصه بر حسب دلتا آن سه حالت زير را خواهد داشت :

الف) $\Delta > 0$: تغيير متغير به $r=\varphi_1(x,y)$ و $s=\varphi_2(x,y)$

ب) $\Delta = 0$: تغيير متغير به $r = \varphi(x,y)$ و $s = x$

ج) $\Delta < 0$: نمي توان در اين حالت از روش تغيير متغير معادله را حل نمود . در صورتي كه بتوان $B^2 - 4AC \geq 0$ را تشكيل دهيم مي توان از روش تغيير متغير معادله را حل نمود .

ج) روش ضربي (جداسازي متغير ها) : اين روش يكي از روشهاي مهم براي حل معادلات مي باشد . سه معادله موج – گرما و لاپلاس از اين روش قابل حل است . در اين روش تابع U كه شامل دو متغير مستقل است (مثلا *u=k(x,t)* يا *u=k(x,y)*) به عنوان تابعي از حاصلضرب توابعي از متغيرهاي مستقل تعريف نمود . يعني :

$$U = (k(x,y) = f(x)g(y) = f_x g_y$$

$$U = k(x,t) = f(x)g(t) = f_x g_t$$

شرط استفاده از روش ضربي: حال تابع U را در معادله جايگذاري مي نماييم . اگر بتوان تمام توابع وابسته به x را به يك طرف تساوي و تمام توابع وابسته به y يا t را به طرف ديگر تساوي انتقال داد آن وقت اين معادله از روش ضربي قابل حل خواهد بود .

د) روش دالامبر : اين روش فقط براي حل معادله موج به صورت $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ به كار مي رود .

مثال 3 – معادله $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ را حل كنيد ؟

با توجه به چهار روش ذكر شده مي توان از روش فاكتورگيري استفاده نمود . در نتيجه داريم :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \quad => \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f(y) \quad => \quad \frac{\partial}{\partial x}[u] = f(y)$$

$$=> \quad u = xf(y) + c$$

مثال 4 – معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ را حل كنيد ؟

با توجه به چهار روش ذكر شده مي توان از روش فاكتورگيري استفاده نمود . در نتيجه داريم :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0 \quad => \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f(y) \quad => \quad \frac{\partial}{\partial y}[u] = f(y) \quad => \quad u = \int f(y)dy + c$$

$$=> \quad u = g(y) + k(x)$$

مثال 5 – الف : جواب عمومي معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$ را بدست آوريد ؟ ب : با فرض اينكه بدانيم $U(x,0) = x^2$ و $U(1,y) = \cos y$ جواب خصوصي معادله را بدست آوريد ؟

الف : با توجه به صورت معادله مي توان از روش فاكتورگيري استفاده نمود كه نهايتا جواب عمومي برابر $U = \frac{x^3}{3}\frac{y^2}{2} + k(y) + g(x)$ خواهد شد .

ب : كافي است شرايط فوق را به جواب عمومي معادله اعمال نماييم :

شرط اول : $U(x,0) = x^2 \quad => \quad k(0) + g(x) = x^2 \quad => \quad g(x) = x^2 + k(0) \quad =>$

$$U(x,y) = \frac{x^3 y^2}{6} + k(y) + x^2 - k(0)$$

شرط دوم : $U91,y) = \cos y \quad => \quad U91,y) = \frac{y^2}{6} + k(y) + 1 - k(0) = \cos y \quad =>$

$$k(y) = \cos y - \frac{y^2}{6} + k(0) - 1$$

با ادغام دو شرط داریم : $U(x,y)=\frac{x^3y^2}{6}+\cos y-\frac{y^2}{6}+k(0)-1+x^2-k(0) \quad =>$

$$U(x,y)=\frac{x^3y^2}{6}+\cos y-\frac{y^2}{6}-1+x^2$$

مثال 6 – معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ را حل کنید و جواب عمومي آنرا بدست آوريد ؟

با توجه به روش هاي ذکر شده مي بايست از روش تغيير متغير استفاده نمود :

$$\Delta = b^2-4ac=(-2)^2-4*1*1=0$$

$$Ay'^2-By'+C=0 \quad => \quad y'^2+2y'+1=0 \quad => y'=\frac{-2}{2}=-1 \quad => \quad y=-x+c \quad =>$$

$$y+x=c \quad => \quad r=x+y \quad \& \quad s=x$$

حال مي بايست معادله اصلي را که متغيرهاي آن x و y هستند به معادله اي تبديل کنيم که متغيرهاي آن r و s اند . براي اين امر بايد عبارات زير را محاسبه کنيم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

حال عبارات داراي r و s را در معادله اصلي قرار مي دهيم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0 \quad => \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$$

حال اين معادله به روش فاکتورگيري قابل حل است :

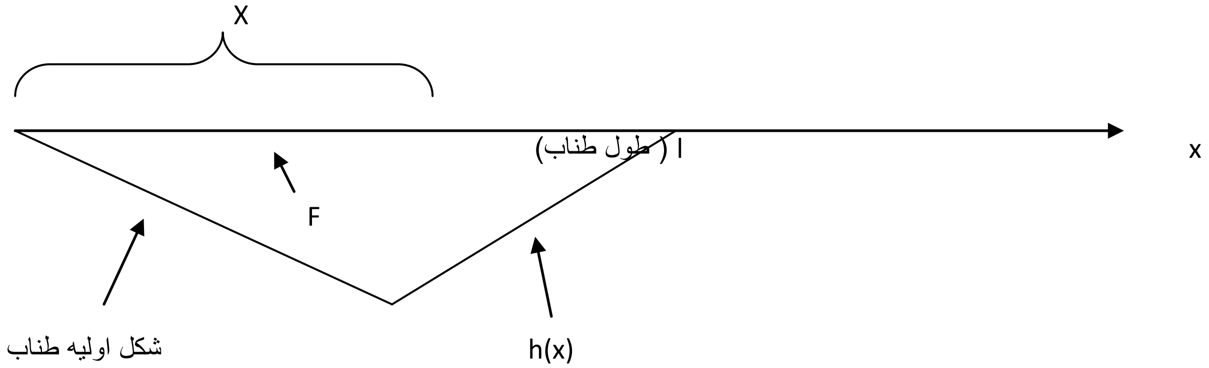
$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial u}{\partial s}\right]=0 \quad => \quad \frac{\partial u}{\partial s}=f(r) \quad => \quad u=sf(r)+g(r) \text{ و } r=x+y \text{ و } s=x$$

$$u=xf(x+y)+g(x+y)$$

حل معادله موج :

اگر نخ قابل ارتعاشي از يك طرف به مانعي محكمي يا از دو طرف به اين مانع متصل شود و اين نخ با استفاده از نيروي اوليه اي شروع به ارتعاش نمايد معادله اي براي اين نخ مرتعش حاكم است كه به معادله موج معروف است .

حالتي را در نظر مي گيريم كه نخ از دو طرف توسط دو مانع محكم شده است :



اگر در هر نقطه در فاصله صفر تاl به اين نخ نگاه كنيم در هر لحظه از زمان اين نخ ارتفاع خاصي خواهد داشت **(**U(x,t)) اثبات شده است كه معادله ديفرانسيل متناظر با اين حركت ارتعاشي به صورت زير است :

هدف حل اين معادله است : يعني محاسبهU(x,t) . با توجه به صورت مسئله داريم :

شرايط اوليه : الف) $U(x,0) = h(x)$

ب) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = k(x)$

شرايط مرزي : الف) $u(0,t) = 0$

ب) $u(l,t) = 0$

پس مي توان معادله موج مربوط به يك نخ ارتعاشي و بسته از دو طرف را به صورت زير بيان كرد :

حال به حل اين معادله با استفاده از روش ضربي مي پردازيم و ابتدا تحقيق مي كنيم آيا اين معادله از روش ضربي قابل حل است يا خير ؟

فرض مي كنيم تابع u را بتوان به صورت حاصلضرب دو تابع مستقل يكي ازx و ديگري از t نوشت : $u(x,t) = f(x)g(t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x)g''(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)gx)$$

$$=> \quad f(x)g''(t) = C^2 f''(x)g(t) \qquad => \quad \frac{g''(t)}{C^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = k$$

با توجه به اينكه توانستيم همه توابع مربوط بهx را به يك طرف و همه توابع مربوط بهt را به طرف ديگر تساوي منتقل كنيم اين معادله از روش ضربي قابل حل است . واضح است كه تساوي فوق هنگامي امكان پذير است كه هر دو عبارت برابر عددي ثابت باشند در اين حالت داريم :

$$\frac{g''(t)}{C^2 g(t)} = k \qquad \& \qquad \frac{f''(x)}{f(x)} = k$$

و اين دو معادله دو معادله ديفرانسيل معمولي هستند و از روشهاي حل معادلات ديفرانسيل قابل حل است . براي حل اين معادلات مي توان سه حالت زير را در نظر گرفت :

الف) k=0 $\quad => \quad f''(x) = 0 \quad \& \quad g''(t) = 0$

ب) $k > 0 \quad => \quad k = \lambda^2 \quad => \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda^2 \quad \& \quad \frac{g''(t)}{C^2 g(t)} = \lambda^2$

ج) $k < 0 \quad => \quad k = -\lambda^2 \quad => \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda^2 \quad \& \quad \frac{g''(t)}{C^2 g(t)} = -\lambda^2$

حال به بررسي جواب هاي فوق مي پردازيم :

الف) k=0

$$f''(x) = 0 \quad => \quad f'(x) = A \quad => \quad f(x) = Ax + B$$

$$g''(t) = 0 \quad => \quad g'(t) = C \quad => \quad g(t) = Ct + D$$

$$=> \quad u(x,t) = (Ax + B)(Ct + D)$$

ب) $k > 0 \quad => \quad k = \lambda^2$

$$g''(t) = \lambda^2 C^2 g(t) \qquad \& \qquad f''(x) = \lambda^2 f(x)$$

با حل دو معادله فوق داريم :

$$u(x,t) = \left(Ae^{\lambda ct} + Be^{-\lambda ct}\right)\left(Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x}\right)$$

ج) $k < 0 \quad => \quad k = -\lambda^2$

$$g''(t) + \lambda^2 C^2 g(t) = 0 \qquad \& \qquad f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0$$

با حل دو معادله فوق داريم :

$$u(x,t) = (A\sin\lambda ct + B\cos\lambda ct)(C\sin\lambda x + D\cos\lambda x)$$

به صورت خلاصه جوابهاي معادله موج به صورت زير است :

$$1- \ u(x,t) = (Ax + B)(Ct + D)$$

$$2- \ u(x,t) = \left(Ae^{\lambda ct} + Be^{-\lambda ct}\right)\left(Ce^{\lambda x} + De^{-\lambda x}\right)$$

$$3- \ u(x,t) = (A\sin\lambda ct + B\cos\lambda ct)(C\sin\lambda x + D\cos\lambda x)$$

حال به بررسي اين مي پردازيم كه كداميك از سه جواب فوق به عنوان جواب معادله محسوب مي شود . در اين مرحله از شرايط اوليه و مرزي جهت يافتن پاسخ معادله موج استفاده مي كنيم كه ابتدا شرايط مرزي را روي معادله اول تست مي كنيم :

اعمال شرط اول مرزي (u(0,t)=0) :

$$u(0,t) = (A*0 + B)(Ct + D) \quad => \quad B(Ct + D) = 0 \quad => \quad B = 0 \;\&\; Ct + D = 0 \quad => u(x,t) = 0$$

$$=> u(x,t) = Ax(Ct + D)$$

اعمال شرط دوم مرزي (u(l,t)=0) :

$$\mathrm{u(l,t)} = 0 \quad => \quad Al(\mathrm{CD}) = 0 \quad => \quad A = 0 \,\&\, B = 0 \quad => \quad u(\mathrm{x,t}) = 0$$

در نتيجه اين معادله نمي تواند جواب معادله موج باشد .

تست معادله دوم و اعمال شرط مرزي اول :

$$=> \quad (A + B)\left(Ce^{\lambda ct} + De^{\lambda ct}\right) = 0 \quad => \quad A + B = 0 \quad => \quad B = -A$$

$$=> \quad u(x,t) = A\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)\left(Ce^{\lambda ct} + De^{-\lambda ct}\right)$$

اعمال شرط مرزي دوم :

$$=> \quad u(l,t) = A\left(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}\right)\left(Ce^{\lambda ct} + De^{-\lambda ct}\right) = 0 \quad => \quad u(x,t) = 0$$

در نتيجه اين معادله نيز نمي تواند جواب معادله موج باشد . پس معادله سوم را به عنوان جواب معادله موج انتخاب و شرايط مرزي و اوليه را روي آن بررسي مي نماييم .

تست معادله سوم و اعمال شرايط مرزي اول :

$$(A + 0)(C \cos\lambda ct + D \sin\lambda ct) = 0 \quad => \quad A = 0 \quad => u(x,t) = B \sin\lambda x\, (C \cos\lambda ct + D \sin\lambda ct)$$

$$=> \quad u(x,t) = \sin\lambda x\, (BC \cos\lambda ct + BD \sin\lambda ct)$$

با در نظر گرفتن ضريب BC به نام a و ضريب BD به نام b خواهيم داشت :

شماره 1 : $u(x,t) = \sin\lambda x\, (a \cos\lambda ct + b \sin\lambda ct)$

اعمال شرط مرزي دوم :

$$=> \quad \sin\lambda l\, (a \cos\lambda ct + b \sin\lambda ct) = 0 \quad => \quad \sin\lambda l = 0 \quad => \quad \lambda l = n\pi \quad => \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

با جايگذاري مقدار λ در معادله شماره1 داريم :

شماره 2 : $u(x,t) = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(a\cos\frac{n\pi}{l}ct + b\sin\frac{n\pi}{l}ct\right)$

كافي است در معادله شماره2 ضرايب a و b را تعيين نماييم كه اين ضرايب از شرايط اوليه حاصل مي شوند .

نكته : در معادله شماره2 به ازا قرار دادن هر n دلخواه و مخالف صفر مي توان يك جواب بدست آورد و همچنين مي توان به ازا هر n يك a و b دلخواه داشت .اما مي دانيم اگر معادله اي داراي تعدادي جواب عمومي باشد مجموع آنها نيز جواب معادله هستند :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}ct + b_n\sin\frac{n\pi}{l}ct\right)\right)$$

حال شرط *u(x,0)=h(x)* را به معادله فوق اعمال مي كنيم :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\,(\mathrm{a_n}+0)\right) \quad => \; h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{a_n}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

با مقايسه رابطه حاصله فوق با رابطه اساسي سري فوريه مي توان ملاحظه نمود كه *h(x)* همواره يك تابع فرد است .و از طرفي داريم :

$$\frac{2\pi}{\mathrm{T}}nx = \frac{n\pi}{l}x \quad => \quad T = 2l$$

يعني *h(x)* يك تابع متناوب فرد (سينوسي) با دوره تناوب دو برابر طول طناب است .در سري فوريه در حالتي كه *f(x)* فرد بود داشتيم :

$$\mathrm{b_n} = \frac{4}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$=> \quad \mathrm{a_n} = \mathrm{b_n} = \frac{4}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

و از طرفي داريم :*T=2l* در نتيجه داريم :

$$\mathrm{a_n} = \frac{2}{\mathrm{l}}\int_0^{\mathrm{l}} h(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

براي محاسبه ضريب b_n كافي است شرط اوليه دوم را به معادله *u(x,t)* حاصله فوق اعمال نماييم و در نتيجه داريم :

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\left(-a_n\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi}{l}ct + b_n\frac{n\pi}{l}c\,c\cos\frac{n\pi}{l}ct\right)\right)$$

$$=> \;\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{c}\quad\sin\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{x}\right) \quad => \quad k(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{c}\quad\sin\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{x}\right)$$

يعني k(x) نيز يك تابع متناوب فرد (سينوسي) با دوره تناوب دو برابر طول طناب است . با در نظر گرفتن ضريب $b_n\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{c}$ به نام B_n خواهيم داشت :

$$=> \quad k(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{B_n}\quad\sin\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{x}\right)$$

$$=> \quad B_n = \frac{4}{T}\int_{T/2} k(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\;dx \qquad => \quad \frac{\mathrm{n\pi c}}{\mathrm{l}}\mathrm{b_n} = \frac{2}{\mathrm{l}}\int_0^{\mathrm{l}}\mathrm{k(x)}\sin\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}\mathrm{x\,dx}$$

$$=> \quad b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l k(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

خلاصه و جمع بندي حل معادله موج : معادله موج به شكل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

و با شرايط مرزي : الف) $u(0,t) = 0$

ب) $u(l,t) = 0$

و شرايط اوليه : الف) $U(x,0) = h(x)$

ب) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = k(x)$

حل شد و اثبات گرديد كه جواب آن به صورت زير است :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} ct + b_n \sin \frac{n\pi}{l} ct \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

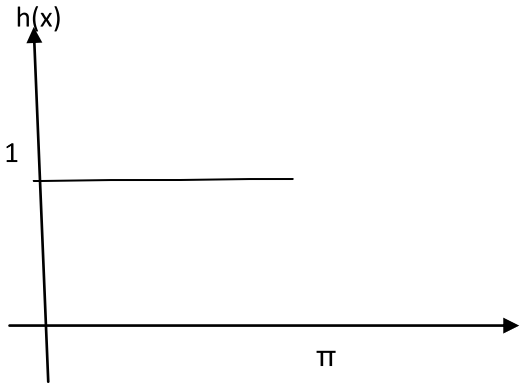
$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l k(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

و در حالت خاص اگر در لحظه اوليه سرعت طناب صفر باشد ($k(x)=0$) ضريب $b_n = 0$ و خواهيم داشت :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} ct \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

مثال 7 – با استفاده از جواب معادله موج معادلات حركت طنابي مرتعش را بدست آوريد كه سرعت اوليه آن صفر است و شكل آن در لحظه ارتعاش به صورت زير است و سرعت موج يك است ؟



طبق صورت سؤال داريم : k(x)=0 & l= π & C=1 & h(x)=1

با توجه به اينكه سرعت اوليه صفر مي باشد فقط كافي است ضريب a_n محاسبه شود .

$$\mathrm{a_n} = \frac{2}{\mathrm{l}}\int_0^{\mathrm{l}} h(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \qquad => \quad \mathrm{a_n} = \frac{4}{\mathrm{n\pi}} \qquad \text{براي } n \text{هاي فرد}$$

$$=> \quad u(x,t) = \sum_{n \text{هاي فرد}} \frac{4}{n\pi}\cos nt \sin nx$$

حل معادله گرما (انتقال حرارت) :

فرض كنيم ميله اي با طول محدود l از يك طرف حرارت داده شود . مي خواهيم مقدار حرارت را در هر نقطه x و در هر زمان t بدست آوريم در فيزيك حرارت معادله ديفرانسيل متناظر با اين مسئله به صورت زير بدست مي آيد :

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = \mathrm{C}^2\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

اگر فرض كنيم مقدار گرما در مكانهاي صفر و l (ابتدا و انتهاي ميله) در همه زمانها صفر باشد شرايط اوليه به صورت :

الف) $u(0,t) = 0$ ب) $u(l,t) = 0$ مي باشد . با اين فرض معادله را حل مي كنيم :

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)g'(t)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} = \mathrm{f}''(x)g(t)$$

$$=> \quad f(x)g'(t) = C^2 f''(x)g(t)$$

$$\frac{g'(t)}{C^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = k$$

$$g'(t) = kC^2 g(t) \quad => \quad g'(t) - kC^2 g(t) = 0$$

$$f''(x) = kf(x) \quad => \quad f''(x) - kf(x) = 0$$

الف) k=0 $\quad <= \quad f''(x) = 0 \quad \& \quad g'(t) = 0$

ب) $k > 0 \quad <= \quad g'(t) - \lambda^2 C^2 g(t) = 0 \quad \& \quad f''(x) - \lambda^2 f(x) = 0$

ج) $k < 0 \quad <= \quad k = -\lambda^2 \ <= \ g'(t) + \lambda^2 C^2 g(t) = 0 \quad \& \quad f''(x) + \lambda^2 f(x) = 0$

حال به بررسي جواب هاي فوق مي پردازيم :

الف) k=0

$$g'(t) = 0 \quad => \quad g(t) = A$$

$$f''(x) = 0 \quad => \quad f(x) = C_1 x + C_2$$

$$=> \quad u(x,t) = (C_1 x + C_2)A$$

در جواب فوق تابع زمان وجود ندارد و نمي تواند جواب معادله گرما باشد.

ب) $k > 0 \quad <= \quad k = \lambda^2$

$$g'(t) - \lambda^2 C^2 g(t) = 0 \quad \& \quad f''(x) - \lambda^2 f(x) = 0$$

$$=> \quad u(x,t) = Ae^{\lambda^2 C^2 t}\left(C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}\right)$$

با بررسي شرايط مرزي در معادله فوق خواهيم داشت :

$$u(x,t) = Ae^{\lambda^2 C^2 t}\left(C_1 e^{\lambda * 0} + C_2 e^{-\lambda * 0}\right)$$

$$=> \quad u(x,t) = Ae^{\lambda^2 C^2 t}\left(C_1 e^{\lambda x} - C_1 e^{-\lambda x}\right) = AC_1 e^{\lambda^2 C^2 t}\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$$

با در نظر گرفتن ضريب AC_1 به عنوان B داريم :

$$u(x,t) = Be^{\lambda^2 C^2 t}\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)$$

با اعمال شرط مرزي دوم داريم :

$$Be^{\lambda^2 C^2 t}\left(e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}\right) = 0 \quad => \quad B \neq 0 \quad => \quad u = 0$$

در نتيجه در صورتي كه $k > 0$ باشد اين معادله نيز جواب معادله انتقال حرارت را بدست نمي دهد .

ج) $k < 0 \quad <= \quad k = -\lambda^2$

$$g'(t) - \lambda^2 C^2 g(t) = 0 \quad \& \quad f''(x) - \lambda^2 f(x) = 0$$

$$=> u(x,t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)Ae^{-\lambda^2 c^2 t}$$

با اعمال شرط اول مرزي داريم :

$$u(0,t) = 0 \quad => \quad (C_1 + C_2 * 0)Ae^{-\lambda^2 c^2 t} = 0 \quad => C_1 = 0 \quad => \quad u(x,t) = C_2 \sin \lambda x \, Ae^{-\lambda^2 c^2 t}$$

با در نظر گرفتن ضريب AC_2 به نام B و اعمال شرط مرزي دوم خواهيم داشت :

$$B \sin \lambda l \, e^{-\lambda^2 c^2 t} = 0 \quad => \quad \sin \lambda l = 0 \quad => \quad \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

$$=> \quad u(x,t) = B \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}t}$$

كافي است B را تعيين كنيم . در معادله فوق به ازا هرn يك جواب داريم پس مجموع همه اين جوابها نيز جواب مسئله هستند :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}t}$$

براي محاسبه b_n نياز به شرط ديگري داريم . اگر فرض كنيم حرارت اوليه در هر مكان معلوم باشد :

$$u(x,0) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \& \quad \frac{2\pi n}{T} = \frac{n\pi}{l} \quad => \quad T = 2l$$

با ملاحظه معادله فوق مي توان استنباط كرد كه $h(x)$ تابعي متناوب با دوره تناوب $2l$ و فرد است .

$$\mathrm{b_n} = \frac{4}{\mathrm{T}} \int_{\mathrm{T}/2} h(x) \sin \frac{2\pi}{T} nx \, dx$$

$$=> \quad \mathrm{b_n} = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

خلاصه و جمع بندي حل معادله گرما : معادله انتقال حرارت به شكل

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = \mathrm{C}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

و با شرايط مرزي : الف) $u(0,t) = 0$

ب) $u(l,t) = 0$

و شرايط اوليه : U(x,0) = h(x)

حل شد و اثبات گرديد كه جواب آن به صورت زير است :

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi}{l} x e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}t} \right)}$$

$$\mathbf{b_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx}$$

مثال 8 – جواب معادله گرما به صورت u(x,0)=5 و $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ با پارامتر *C=1* را بدست آورید ؟

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 5\ \sin\frac{n\pi}{\pi} x\, dx = \frac{10}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\, dx$$

$$b_n = \frac{20}{n\pi} \qquad n\text{هاي فرد}$$

$$u(x,t0 = \sum_{n\text{هاي فرد}} \frac{20}{n\pi}\sin nx\, e^{-n^2 t}$$

حل معادله لاپلاس :

معادله لاپلاس به فرم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \cdots = 0$$

قابل بیان است که در فضاي دو بعدي به صورت خاص

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

قابل بیان است . کاربرد این معادله در محاسبه اختلاف پتانسیل به وجود آمده در سطوح رسانا مي باشد . این معادله با استفاده از روش ضربي قابل حل است : *u(x,y)=f(x)g(y)*

حل معادله لاپلاس :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$U=f(x)g(y) \quad => \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)g(y) \quad \& \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x)g''(y)$$

$$=> f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0 \quad => f''(x)g(y) = -f(x)g''(y) \quad => \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}$$

پس این معادله با روش ضربي قابل حل است :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = k \quad \& \quad \frac{g''(y)}{g(y)} = -k$$

الف) *k=0*

$$f''(x) = 0 \quad => \quad f(x) = Ax + B$$

$$g''(y) = 0 \quad => \quad g(y) = Cy + D$$

$$=> u(x,y) = (Ax+B)(Cy+D)$$

ب) *k>0* $\quad <= \quad k = \lambda^2$

$$=> \quad u(x,y) = \left(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}\right)(C\cos\lambda y + D\sin\lambda y)$$

ج) $k<0$ <= $k=-\lambda^2$

$$=> \quad u(x,y)=\left(Ae^{\lambda y}+Be^{-\lambda y}\right)(C\cos\lambda x+D\sin\lambda x)$$

همانطور كه مي بينيم اين معادله نيز داراي سه جواب است كه جواب خصوصي معادله با استفاده از اعمال شرايط اوليه و مرزي محاسبه خواهد شد .

روش دالامبر :

اين روش فقط براي حل معادله موج به صورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

به كار مي رود كه در اين معادله شرايط اوليه و مرزي به صورت زير هستند :

شرايط مرزي : الف) $u(0,t)=0$

ب) $u(l,t)=0$

شرايط اوليه : الف) $U(x,0)=h(x)$

ب) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=k(x)$

براي حل اين معادله دالامبر تغيير متغيري به صورت $z=x+ct$ و $w=x-ct$ پيشنهاد داد .براي تغيير متغير مي بايست عبارات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را با استفاده از قاعده زنجيره اي پيدا كنيم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \quad => \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} \quad => \quad \frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial u}{\partial z}-c\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}\right\}$$

اگر حاصل عبارات $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را در معادله اصلي (معادله موج) قرار دهيم داريم :

$$c^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}\right\}=c^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}\right\}$$

$$=> 4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}=0 \quad => \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial w}=0 \quad => \quad u=\rho[x-ct]+g[x+ct]$$

حال مي توان توابع g و ρ را با استفاده از اعمال شرايط اوليه بدست آورد .

شرط اوليه اول : $u(x,0)=h(x)$

$$=> \quad \rho(x)+g(x)=h(x)$$

شرط اوليه دوم : $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=k(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-c\rho'(x-ct)+cg'(x+ct)=k(x)$$

$$=>\ \ -c\rho'(x)+cg'(x)=k(x)\ \ =>\ -\rho'(x)+g'(x)=\frac{1}{\mathrm{c}}\mathrm{k(x)}\ \ =>\ -\rho(x)+g(x)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x}k(\tau)\,d\tau$$

$$\begin{cases} \text{شماره 1} : \ \rho(x)+g(x)=h(x) \\ \text{شماره 2} : \ -\rho(x)+g(x)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x}k(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

اگر دو عبارت فوق را با هم جمع كنيم داريم :

$$=>\ \ 2g(x)=h(x)+\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x}k(\tau)\,d\tau \quad =>\ \ g(x)=\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x}k(\tau)\,d\tau$$

از رابطه شماره 1 داريم :

$$\rho(x)=h(x)-g(x)\ \ =>\ \ \rho(x)=h(x)-\left\{\frac{1}{2}h(x)+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x}k(\tau)\,d\tau\right\}\quad =>\ \ \rho(x)=\frac{1}{2}h(x)-\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x}k(\tau)\,d\tau$$

از طرفي :

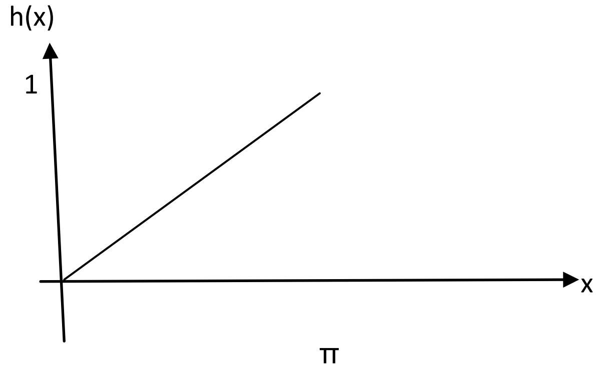
$$u=\rho(x-ct)+g(x+ct)$$

$$=>\ \ u=\frac{1}{2}h(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x-ct}k(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}h(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x+ct}k(\tau)\,d\tau$$

در نتيجه جواب دالامبر معادله موج عبارتست از :

$$\boldsymbol{u(x,t)=\frac{1}{2}\{h(x-ct)+h(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}k(\tau)\,d\tau}$$

مثال 8 – فرض كنيد نخ در لحظه صفر داراي سرعت اوليه صفر است و شكل طناب در لحظه اول به صورت زير است اگر پارامتر سرعت موج يك باشد معادله حركت نخ را به روش دالامبر در هر لحظه از زمان بيابيد ؟$u(0,t)=u(\pi,t)=0$



ابتدا بايستي مقدار h(x) را محاسبه كنيم كه از محاسبه شيب خط داريم: $h(x)=\frac{1}{\pi}x$. در اين مسئله سرعت اوليه صفر است يا به عبارتي $\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+xt}k(\tau)d\tau=0$

از طرفي مي دانيم كه h(x) را مي توان يك تابع متناوب فرد با دوره تناوب $2l=2\pi$ در نظر گرفت پي سري فوريه دارد :

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin\frac{2\pi nx}{T}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin \mathrm{nx})$$

$$\mathrm{b_n}=\frac{4}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}/2}\mathrm{h(x)}\sin\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{nx}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi$$

$$=>u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\{-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\,[\sin n(x+ct)+\sin n(x-ct)]\}$$

خلاصه :

فرم كلي معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه2

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} + E\frac{\partial U}{\partial y} + FU + G = 0$$

روش هاي حل معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي مرتبه2 : 1- فاكتورگيري 2- تغيير متغير 3- ضربي 4- دالامبر

معادله موج و ضرايب آن :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}ct + b_n \sin\frac{n\pi}{l}ct \right) \sin\frac{n\pi}{l}x \right)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l k(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

حالت خاص معادله موج زماني است كه سرعت اوليه صفر باشد در نتيجه داريم :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}ct \right) \sin\frac{n\pi}{l}x \right)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

معادله گرما (انتقال حرارت) :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin\frac{n\pi}{l} x e^{-\frac{n^2\pi^2 c^2}{l^2}t} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\, dx$$

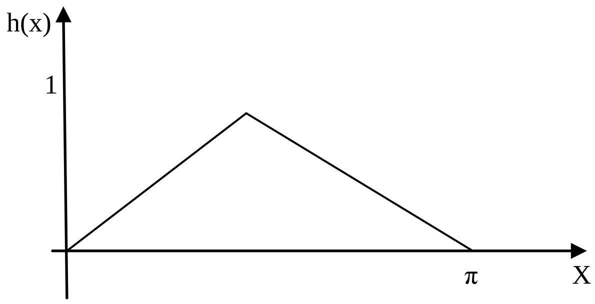
روش دالامبر (حل معادله موج) :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{h(x-ct) + h(x+ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} k(\tau)\, d\tau$$

تمرینات آخر فصل :

معادله زیر را حل کنید ؟ $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

جواب معادله يك نخ مرتعش با سرعت اولیه صفر و سرعت موج يك و شكل اولیه به صورت زیر را بدیست آورید ؟



مثال شماره 8 را به روش ضربي حل نموده و پاسخ حاصله را با پاسخ روش دالامبر مقایسه کنید ؟

فصل سوم

آشنايي با اعداد و توابع مختلط

تعریف عدد مختلط (Z) : يك عدد مختلط عددي است شامل دو بخش حقيقي و موهومي كه در واقع هر عدد مختلط بين نقطه اي در فضاي دو بعدي است : Z=a+bj

به عنوان مثال منظور از عدد2+j نقطه اي است با طول 2 و عرض 1 در فضاي دو بعدي .

هر عدد مختلط را مي توان با دو فرم :**دکارتی (x+jy) و قطبی به شکل** $r\sphericalangle\theta$ نمايش داد .

تبدیل فرم دکارتی به قطبی و برعکس :

$$x + jy \quad => \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \& \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$r\sphericalangle\theta \quad => \quad x = r\cos\theta \quad \& \quad y = \sin\theta \quad => \quad Z = r[\cos\theta + j\sin\theta]$$

اعمال اصلي روي اعداد مختلط :

$$\mathrm{Z}_1 = \mathrm{a}_1 + jb_1 \equiv r_1\sphericalangle\theta_1 \quad \& \quad Z_2 = a_2 + jb_2 \equiv r_2\sphericalangle\theta_2$$

الف) جمع و تفریق :

$$=> \quad \mathrm{Z}_1 \pm \mathrm{Z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

ب) ضرب و تقسیم :

$$Z_1 * \mathrm{Z}_2 = \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2\sphericalangle\theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{Z}_2} = \frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}\sphericalangle\theta_1 - \theta_2$$

ج) توان و جذر :

1 - توان رساندن يك عدد مختلط :

$$Z^{\mathrm{n}} = \mathrm{r}^{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}$$

نكته : هنگامي كهn به توان مي رسد اندازه آن به توانn رسيده و زاويه آن 2 برابر مي شود .

مثال 1- مقدار $(1+j)^{100}$ را محاسبه كنيد ؟

$$(1+j)^{100} \equiv \left(\sqrt{2}\sphericalangle\frac{\pi}{4}\right)^{100} = 2^{50}\sphericalangle\frac{100\pi}{4} = 2^{50}\sphericalangle 25\pi = 2^{50}\{\cos 25\pi + \mathrm{j}\sin 25\pi\} = -2^{50}$$

$$=> \quad \sqrt[100]{(-2)^{50}} = 1 + j$$

2 - جذر اعداد مختلط : با توجه به مثال قبل ملاحظه مي شود جذر اعداد منفي در حوزه مختلط مفهوم پيدا مي كند بنابراين با تعريف اعداد مختلط اعداد منفي نيز جذر دار مي شوند .

$$\mathrm{j}^2 = -1 \quad => \quad j = \sqrt{-1}$$

مثال 2 - $\sqrt{-16}=?$

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16*(-1)}=\sqrt{16}*\sqrt{-1}=4j$$

ریشه n ام یك عدد مختلط (چه مثبت و چه منفی) :

$$\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}\measuredangle\frac{\theta}{n}$$

اگر بخواهیم کلیه جوابهاي $\sqrt[n]{Z}$ را بدست آوریم مي توان نوشت :

$$\sqrt[n]{Z}=Z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+j\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

مثال 3- $\sqrt[3]{1}$ را بیابید ؟

$$1=1+0j\equiv 1\measuredangle 0$$

$$=>\quad \sqrt[3]{1}=1^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3}+j\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$

به ازا قرار دادن k هاي مختلف از صفر تا n داریم :

$$k=0\quad =>\quad Z_1=1$$

$$k=1\quad =>\quad Z_2=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$k=2\quad =>\quad Z_3=1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+j\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

مثال 4- معادله $Z^4-j=0$ را حل کنید ؟

$$Z^4-j=0\quad =>\quad Z^4=j\quad Z=j^{\frac{1}{4}}\qquad \&\quad j\equiv 1\measuredangle\frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+j\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\qquad \&\quad k=0,1,2,3$$

$$k=0\quad =>\quad Z_1=1(\cos\frac{\pi}{8}+j\sin\frac{\pi}{8})$$

$$k=1\quad =>\quad Z_2=1(\cos\frac{5\pi}{8}+j\sin\frac{5\pi}{8})$$

$$k=2\quad =>\quad Z_3=1(\cos\frac{9\pi}{8}+j\sin\frac{9\pi}{8})$$

$$k=3\quad =>\quad Z_4=1\left(\cos\frac{13\pi}{8}+j\sin\frac{13\pi}{8}\right)$$

لگاریتم اعداد مختلط :

$$\log Z=\log re^{j\theta}=\log r+\log e^{j\theta}=\log r+j\theta\log e$$

$$=>\quad \ln Z=\ln r+j\theta\ln e$$

$$=>\quad \mathbf{\ln Z=\ln r+j\theta}$$

نكته :

$$Z = re^{j\theta} = \mathrm{r}e^{\mathrm{j}(\theta\pm 2\mathrm{k}\pi)}$$

با توجه به نكته فوق مي توان لگاريتم اعداد مختلط را بدين صورت تعريف نمود :

$$\boldsymbol{ln\,Z = ln\,r + j(\theta \pm 2k\pi)} \qquad \& \;\; k\epsilon z$$

يعني تابع log در اعداد مختلط چند مقداري است . براي تابع$\ln Z$ نيز مي توان يك مقدار اصلي تعريف نمود . مقدار اصلي يا اصطلاحا شاخه اصلي تابع $\ln Z$ به ازا $k=0$ محاسبه مي شود . در اين حالتθ همواره بين $-\pi < \theta \leq \pi$ انتخاب مي شود . ($\theta \in (-\pi, \pi]$)

مثال 5- مقدار اصلي $log\ i$ را محاسبه كنيد ؟

$$i = 0 + i \equiv 1e^{j\frac{\pi}{2}} \quad => \quad \ln i = \ln 1 + j\frac{\pi}{2} \quad => \quad Ln\ i = j\frac{\pi}{2}$$

مثال 6 – مقدار اصلي *ln(-j)* را محاسبه كنيد ؟

$$-j = 0 - j \equiv 1e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad => \quad Ln(-j) = \ln r + j\theta => \quad Ln(-j) = -j\frac{\pi}{2}$$

مثال 7 – مقدار اصلي *ln(-1)* را بيابيد ؟

$$-1 = -1 + 0j \equiv 1e^{j\pi} \quad => \quad Ln(-1) = j\pi$$

مثال 8- مقادير اصلي *Ln(1+j)* و *Ln(1-j)* را بيابيد ؟

$$Ln(1+j) = ln\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4}$$

$$Ln(1-j) = ln\sqrt{2} - j\frac{\pi}{4}$$

<u>توان اعداد مختلط :</u>

$$\boldsymbol{Z^Z = \left(r^a e^{ja\theta}\right)\left(r^{bj} e^{-b\theta}\right)}$$

از طرفي داريم : $bj = lne^{bj}$

$$=> \quad \boldsymbol{\mathrm{Z}^{\mathrm{Z}} = \left(r^a e^{ja\theta}\right)\left(r^{\ln e^{bj}} e^{-b\theta}\right)}$$

مثال 9 – مقدار عبارت j^j را محاسبه كنيد ؟

$$j^{\mathrm{j}} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\right)^{\mathrm{j}} = e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}^2} \quad => \quad j^{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

توابع مثلثاتي : براي محاسبه توابع مثلثاتي اعداد مختلط از فرم دكارتي استفاده مي شود .

$$\sin \mathrm{Z} = \sin(\mathrm{a} + \mathrm{jb}) = \sin \mathrm{a} \cos \mathrm{bj} + \sin \mathrm{bj} \cos \mathrm{a}$$

$$=> \quad \boldsymbol{sin\,Z = sin\,a\,cosh\,b + j\,sinh\,b\,cos\,a}$$

$$\cos Z = \cos(\mathrm{a} + \mathrm{bj}) = \cos \mathrm{a} \cos \mathrm{bj} - \sin \mathrm{a} \sin \mathrm{bj}$$

$$\boldsymbol{\cos \mathrm{Z} = \cos \mathrm{a} \cosh \mathrm{b} - j \sinh b \sin a}$$

$$\boldsymbol{\tan Z = \frac{\sin \mathrm{Z}}{\cos \mathrm{Z}} = \tan \mathrm{a} - \cot \mathrm{a}}$$

$$\cot Z = \frac{\cos Z}{\sin Z} = \cot a - \tan a$$

مثال 10- $sin(1+j)$ را محاسبه كنيد ؟

$$\sin(1+j) = \sin 1 \cos j + \cos 1 \sin j \quad => \quad \sin(1+j) = \sin 1 \cosh 1 + j \sinh 1 \cos 1$$

مشتق توابع مختلط و شرايط كوشي ريمان :

تابع مختلط تابعي است كه يك فضاي دو بعدي را به يك فضاي دو بعدي تبديل مي نمايد . براي رسم يك تابع مختلط نياز به يك فضاي چهار بعدي داريم كه غير ممكن است . براي همين منظور توابع مختلط را به صورت دو ناحيه جداگانه ترسيم مي كنيم يكي ناحيه Z و ديگري ناحيه W را نمايش مي دهد و به تابع f نگاشت گفته مي شود .

$$W = f(Z) \quad => \quad u + vj = x + jy$$

مثال 11- در تابع $w = e^Z$ مقادير u و v را بيابيد ؟

$$e^Z = e^{(x+jy)} = e^x e^{jy} = e^x(\cos jy + j \sin jy) = e^x \cos jy + je^x \sin jy$$

$$=> \quad u = e^x \cos jy \quad \& \quad v = e^x \sin jy$$

مثال 12- در تابع $W=\sin Z$ مقادير u و v را بيابيد ؟

$$W = \sin Z = \sin(x + jy) = sinxcosh\, y + jsin\, ycosh\, x$$

$$=> \quad u = sinxcosh\, y \quad \& \quad v = \sin ycosh\, x$$

شرايط مشتق پذيري يك تابع مختلط :

كوشي ريمان شرايط مشتق پذيري يك تابع مختلط را بررسي نمود و دو شرط زير را براي مشتق پذيري تابع بدست آورد :

1 - u و v توابعي پيوسته باشند .

2 - $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

مثال 13 – تحقيق كنيد آيا تابع $f(Z) = Z^2$ مشتق پذير است يا خير ؟

$$Z = x + jy \quad => \quad Z^2 = x^2 - y^2 + j2xy$$

توابع u و v پيوسته هستند . پس شرط اول كوشي ريمان برقرار است .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad => \quad 2x = 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad => \quad -2y = -2y$$

در نتيجه شرط دوم نيز برقرار است پي اين تابع همواره و در همه نقاط فضا مشتق پذير است .

مثال 14- تحقيق كنيد آيا تابع $f(Z) = Re\{Z\}Z^2$ مشتق پذير است يا خير ؟

$$Re\{Z\} = x \quad => \quad f(Z) = x^3 - x^2y^2 + j2x^2y$$

توابع u و v پيوسته هستند . پس شرط اول كوشي ريمان برقرار است .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2 \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -2xy \quad \& \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 4xy$$

$$3x^2 - \mathrm{y}^2 = 2x^2$$

$$4xy = 2xy$$

$$=> \quad x = 0 \ \& \ y = 0$$

اين تابع فقط در مبدا مختصات مشتق پذير است .

مثال 15- تحقيق كنيد آيا تابع $f(Z)=Re\{Z\}$ مشتق پذير است يا خير ؟

شرط پيوسته بودن u و v برقرار است ولي با توجه به مشتق گيري هاي شرايط كوشي ريمان اثبات مي شود اين تابع همواره در هيچ نقطه اي در فضا مشتق پذير نيست .

<u>نتيجه گيري :</u> يك تابع مختلط مي تواند يا در همه جا مشتق پذير باشد يا در نقطه يا محدوده اي خاص مشتق پذير باشد يا ممكن است در هيچ نقطه اي از فضا مشتق پذير نباشد .

محاسبه مشتق توابع مختلط :

واضح است كه تابعي داراي مشتق است كه يا در همه جا مشتق پذير باشد يا حداقل در نقاطي مشتق پذير باشد بنابراين مشتق يك تابع غير مشتق پذير مفهومي ندارد . مشتق يك تابع مشتق پذير را مي توان از يكي از راههاي زير بدست آورد :

1 - با استفاده از فرمول هاي معروف مشتق در صورت امكان

2 - $\mathrm{f}'(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}$

3 - $\mathrm{f}'(Z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$

مثال 16- مشتق توابع Z^2 و $|Z|^2$ را در صورت امكان محاسبه كنيد ؟

مي دانيم تابع Z^2 در همه نقاط فضا مشتق پذير است .

$$\mathrm{f}'(Z) = 2Z$$

$$\mathrm{f}'(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + j2y = 2(x + jy) = 2Z$$

$$f'(Z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = 2x - j(-2y) = 2x + j2y = 2(x + jy) = 2Z$$

$$|Z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + \mathrm{y}^2$$

شرط پيوسته بودن u و v برقرار است و اين تابع فقط در مبدا مختصات مشتق پذير است .

$$\mathrm{f}'(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 0j = 2x$$

$$f'(Z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = 0 - j2y = -j2y$$

نكته : مي توان در حالت كلي بيان كرد كه همه توابع چند جمله اي همواره در همه نقاط فضا مشتق پذيرند و مشتق آنها از رابطه اول قابل محاسبه است .

تعريف تابع تحليلي (آناليتيك) : تابعي را تحليلي در يك نقطه مانند Z_0 ناميم اگر اين تابع در اين نقطه و يك همسايگي آن مشتق پذير باشد .

به عنوان مثال تابع $|\mathrm{Z}|^2$ چون فقط در نقطه $Z=0$ مشتق پذير است در اين نقطه تحليلي نيست .

نتيج :

1 - تابعي كه فقط در يك نقطه مشتق پذير است در هيچ كجا تحليلي نيست .
2 - تابعي كه در هيچ كجا مشتق پذير نيست در هيچ كجا تحليلي نيست .

تعريف تابع تام (كامل) : تابعي كه در همه جا تحليلي باشد تابع تام گفته مي شود .

تعريف معادله لاپلاس : اگر براي تابع u داشته باشيم : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\cdots=0$. به معادله فوق معادله لاپلاس گوييم .

تعريف تابع همساز (هارمونيك) : به تابعي مانند u اصطلاحا همساز يا هارمونيك گوييم اگر اين تابع در معادله لاپلاس صدق كند .

مثال 17- تحقيق كنيد آيا توابع x^2+y^2 و $2xy$ و $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ هارمونيك هستند يا خير ؟

جهت معادله x^2+y^2 با دوبار مشتق گيري از دو متغيره x و y داريم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

با توجه به محاسبات فوق اين تابع در معادله لاپلاس صدق مي كند در نتيجه اين تابع هارمونيك است .

جهت معادله $2xy$ با دوبار مشتق گيري از دو متغيره x و y داريم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

با توجه به محاسبات فوق اين تابع در معادله لاپلاس صدق مي كند در نتيجه اين تابع هارمونيك است .

جهت معادله $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ با دوبار مشتق گيري از دو متغيره x و y داريم :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2} \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2} \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

با توجه به محاسبات فوق اين تابع در معادله لاپلاس صدق مي كند در نتيجه اين تابع هارمونيك است .

تعريف تابع مزدوج همساز (مزدوج هارمونيك) :

اگر تابع $f(Z)=u+jv$ يك تابع تحليلي باشد آنگاه به تابع v يك زوج همساز u گفته مي شود .

مثال 18- آيا تابع $f(Z)=Z^2$ تابع v مزدوج همساز u است ؟ u و v را مشخص كنيد ؟

$$f(Z)=x^2-y^2+j2xy$$

$$=> \quad u=x^2-y^2 \ \ \& \ \ v=2xy$$

يعني تابع $v=2xy$ مزدوج همساز تابع $u=x^2-y^2$ است .

نحوه محاسبه مزدوج همساز تابع u :

تابع u مي بايستي خود همساز باشد در اين صورت براي محاسبه مزدوج همساز آن كافي است از شرايط كوشي ريمان استفاده كنيم .

مثال 19- مزدوج تابع همساز $u = x^2 - y^2$ را محاسبه كنيد ؟

ابتدا بايستي تحقيق كنيم كه آيا اين تابع همساز است يا خير . پس بايد در معادله لاپلاس صدق كند :

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = 2x \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} = 2$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -2y \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

U تابعي همساز است پس از رابطه كوشي ريمان براي محاسبه مزدوج همساز استفاده مي كنيم :

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \quad => \quad 2x = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \quad => \quad v = 2xy + f(\mathrm{x})$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} \quad => \quad -2y = f^{'}(x) \quad => \quad f(x) = c$$

$$=> \quad v = 2xy + c$$

مثال 20- اولا ثابت كنيد تابع $u = y^3 - 3x^2y$ همساز است ؟ ثانيا مزدوج همساز آن را بيابيد ؟ ثالثا تابع تحليلي متناظر با تابع فوق را بيان كنيد ؟

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = -6xy \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} = -6\mathrm{y}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = 3\mathrm{y}^2 \ \ \& \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

در نتيجه تابع u همساز است .

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \quad => \quad -6xy \ = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \quad => \quad v = -3x^2y + \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} \quad => \quad 3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - f^{'}(x) \quad => \quad f(x) = 3x^2$$

$$=> \quad v = -3x^2y + 3x^2 + c$$

$$f(Z) = y^3 - 3x^2y + j(-3x^2y + 3x^2 + c)$$

خلاصه :

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

$$Z_1 * Z_2 = r_1 r_2 \sphericalangle \theta_1 + \theta_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \sphericalangle \theta_1 - \theta_2$$

$$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

$$ln\, Z = ln\, r + j(\theta \pm 2k\pi) \qquad \& \ k\epsilon z$$

$$Z^Z = \left(r^a e^{ja\theta}\right)\left(r^{bj} e^{-b\theta}\right)$$

$$sin\, Z = sin\, a\, cosh\, b + j\, sinh\, b\, cos\, a$$

$$\cos Z = \cos a \cosh b - j \sinh b \sin a$$

$$\tan Z = \frac{\sin Z}{\cos Z} = \tan a - \cot a$$

$$\cot Z = \frac{\cos Z}{\sin Z} = \cot a - \tan a$$

شرايط مشتق پذيري تابع مختلط :

1 - u و v توابعي پيوسته باشند .
2 - $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

محاسبه مشتق توابع مختلط :

1 - با استفاده از فرمول هاي معروف مشتق در صورت امكان
2 - $f'(Z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}$
3 - $f'(Z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$

تابع تحليلي (آناليتيك) : تابعي را تحليلي در يك نقطه مانند Z_0 ناميم اگر اين تابع در اين نقطه و يك همسايگي آن مشتق پذير باشد .

تابع تام (كامل) : تابعي كه در همه جا تحليلي باشد تابع تام گفته مي شود .

تعريف معادله لاپلاس : اگر براي تابع u داشته باشيم : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \cdots = 0$. به معادله فوق معادله لاپلاس گوييم .

تعريف تابع همساز (هارمونيك) :به تابعي مانند u اصطلاحا همساز يا هارمونيك گوييم اگر اين تابع در معادله لاپلاس صدق كند .

تعريف تابع مزدوج همساز (مزدوج هارمونيك) :اگر تابع $f(Z)=u+jv$ يك تابع تحليلي باشد آنگاه به تابع v يك زوج همساز u گفته مي شود .

نحوه محاسبه مزدوج همساز تابع u:تابع u مي بايستي خود همساز باشد در اين صورت براي محاسبه مزدوج همساز آن كافي است از شرايط كوشي ريمان استفاده كنيم .

تمرینات آخر فصل :

معادلات زیر را حل کنید ؟

1) $Z^6 - 1 = 0$
2) $Z^6 + 1 = 0$
3) $Z^{10} - (1 + \mathrm{j}) = 0$
4) $Z^3 + 2 = 0$
5) $9Z^{\frac{3}{4}} + j = 0$

مقادیر زیر را بدست آورید ؟

1) $Ln(-1-j)$
2) $Ln(-5)$
3) $(1 + j)^j$
4) $j^{(1+j)}$

اثبات کنبد آیا $\sin^2 Z + cos^2 Z = 1$ ؟

مقادیر $\cosh \mathrm{Z}$ & $\sinh Z$ را بدست آورید ؟

تحقیق کنید کدامیك از توابع زیر هارمونیك است ؟

1) $u = e^x \cos y$
2) $u = e^x\, siny$
3) $u = x^3 - 3x^2 y$
4) $u = x - y^2$

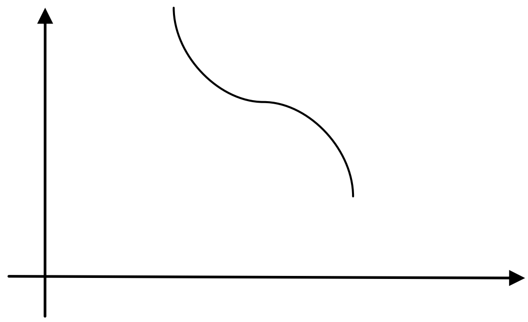
فصل چهارم

انتگرال مختلط

انتگرال مختلط را مي توان به دو بخش كلي زير تقسيم نمود :

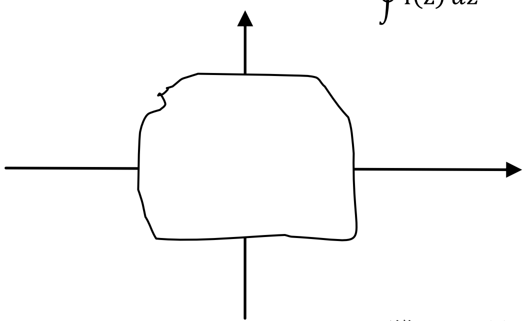
الف) انتگرا ل گيري توابع مختلط روي مسيرهاي باز :

$$\int_{(c)} \mathrm{f}(\mathrm{z})\, dz$$



ب) انتگرال گيري توابع مختلط روي مسيرهاي بسته :

$$\oint \mathrm{f}(\mathrm{z})\, dz$$

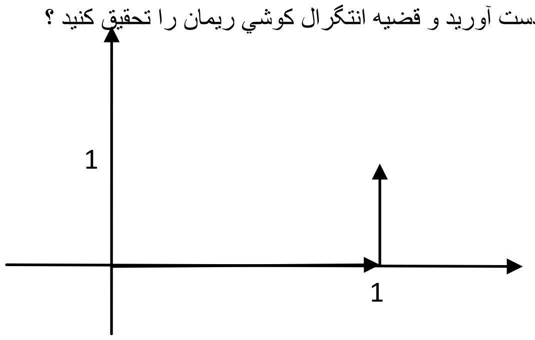


كاربرد انتگرال مختلط : الف) الكترومغناطيس ب) ناصره حقيقي ج) مثلثاتي

محاسبه انتگرال هاي مختلط روي مسير هاي باز :

<u>قضيه كوشي ريمان :</u> اگر انتگرال مختلط $f(z)$ روي مسير باز c تحليلي باشد آنگاه اين انتگرال قضيه بستگي ندارد و فقط به نقاط ابتدا و انتها وابسته است .

مثال 1- $\int_{(c)} z^2 dz$ را روي منحني زير بدست آوريد و قضيه انتگرال كوشي ريمان را تحقيق كنيد ؟



$$z = x + jy \quad => \quad dz = dx + jdy$$

$$\int z^2 dz = \int \{(x + jy)^2 (dx + jdy)\} = \int \{(x^2 - y^2 + j2xy)(dx + jdy)\} = \frac{2}{3}(-1 + j)$$

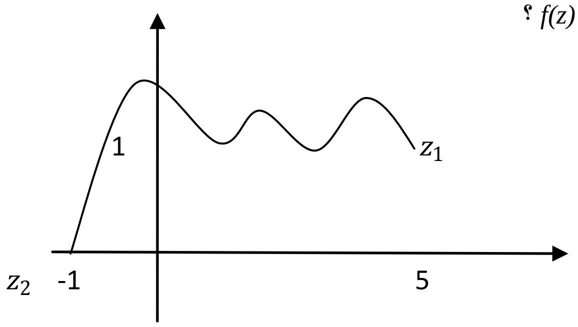
با استفاده از قضيه انتگرال كوشي و با توجه به اينكه تابع تحليلي است داريم :

$$\int z^2\, dz = \frac{z^3}{3}$$

لازم ذكر است نقطه ابتدا : $0+0j$ و انتها : $1+j$ مي باشد و با جايگذاري در پاسخ انتگرال داريم :

$$=> \quad \frac{(1 + j)^3}{3} - 0 \quad => \quad \int z^2\, dz = \frac{1 + j^3 + 3 * 1^3 * j + 3 * 1 * j^3}{3} = \frac{1 - j + 3j - 3}{3} = \frac{2}{3}(-1 + j)$$

مثال 2- مطلوبست محاسبه انتگرال تابع $f(z)=z$ ؟



چون تابع $f(z)=z$ روي مسير فوق تحليلي است پس كافي است از انتگرال كوشي استفاده كنيم :

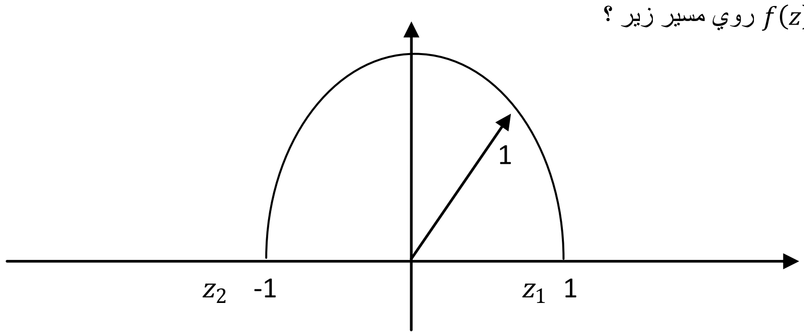
$$\int z\, dz = \frac{z^2}{2}$$

با قرار دادن بازه انتگرال ($z_1 = 5 + j$ و $z_2 = -1 + j$) خواهيم داشت :

$$\int z\, dz = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(5 + j)^2}{2} = \frac{-23 - 10j}{2}$$

اگر تابع $w=f(z)$ تحليلي نباشد ديگر نمي توان از اين قضيه براي محاسبه انتگرال استفاده نمود و حتما بايد مسير در نظر گرفته شود .

مثال 3- مطلوبست محاسبه انتگرال تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ روي مسير زير ؟



چون تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ يك تابع تحليلي نيست پس نمي توان از انتگرال كوشي استفاده نمود . و چون منحني داده شده نيم دايره است تابع را به صورت قطبي تبديل مي كنيم :

$$z=e^{j\theta} \quad => \quad dz=je^{j\theta}\,d\theta$$

$$=> \quad \int_0^{\pi}\frac{1}{z}dz=\int_0^{\pi}\frac{1}{e^{j\theta}}je^{j\theta}\,d\theta=j\pi$$

محاسبه انتگرال هاي مختلط روي منحني هاي بسته :

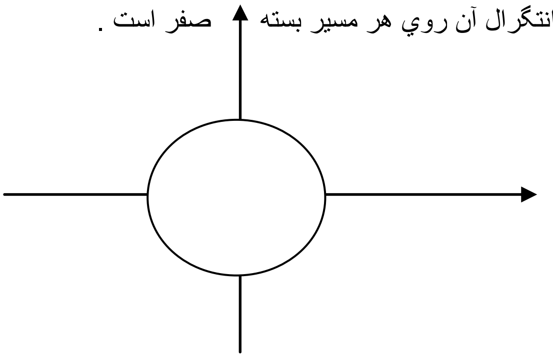
به طور قراردادي روي يك منحني بسته جهت حركت را به شكل پادساعتگرد (جهت دايره مثلثاتي) در نظر مي گيريم .

قضيه انتگرال كوشي روي منحني بسته : اگر تابع $f(z)$ <u>روي منحني بسته c و در داخل آن</u> تحليلي باشد آنگاه حاصل انتگرال روي مسير بسته برابر صفر است .

مثال 4- بيان كنيد با توجه به قضيه فوق كداميك از انتگرال هاي زير روي منحني بسته داده شده صفر است ؟

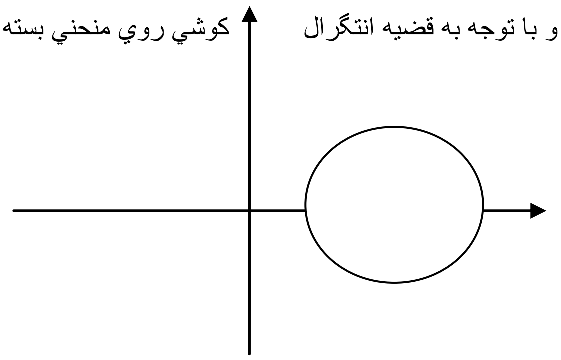
$$1)\quad \oint z^2\,dz=0$$

چون تابع z^2 در همه جا تحليلي است پس حاصل انتگرال آن روي هر مسير بسته صفر است .



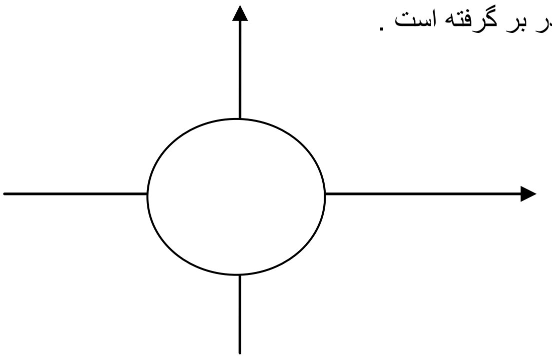
$$2)\quad \oint \frac{1}{z}\,dz=0$$

تابع $\frac{1}{z}$ در همه جا به جز مبدا تحليلي است بنابراين و با توجه به قضيه انتگرال كوشي روي منحني بسته برابر صفر است.



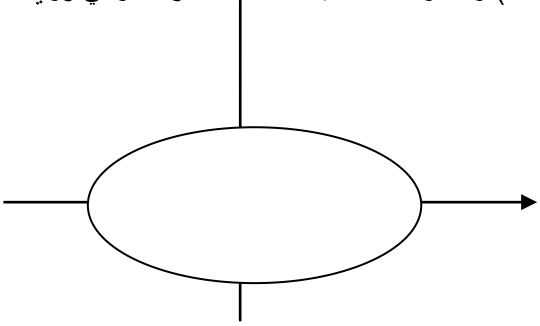
$$3)\quad \oint \frac{1}{z}\,dz \neq 0$$

چون منحني بسته مبدا را که در آنجا تحليلي است در بر گرفته است .



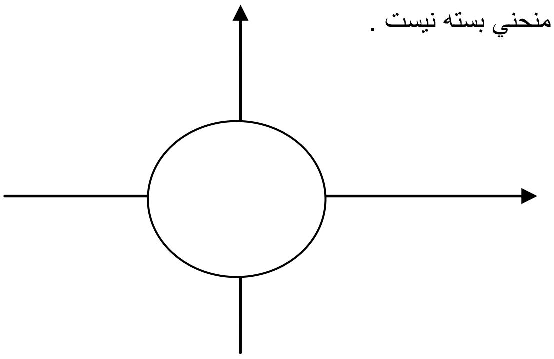
$$4)\quad \oint \frac{1}{z^2-1}\,dz \neq 0$$

اين تابع داراي دو نقطه غير تحليلي است (نقاط 1و 1-) و با توجه به قضيه انتگرال کوشي روي مسير بسته پاسخ مخالف صفر است .



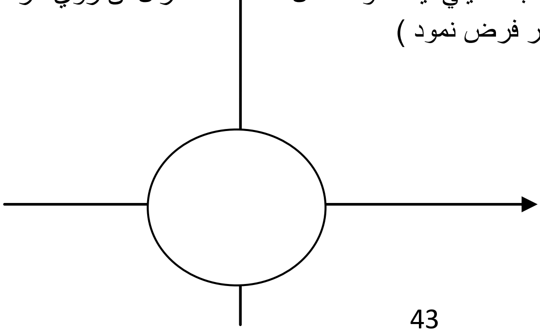
$$5)\quad \oint \frac{1}{z^2-1}\,dz = 0$$

برابر صفر است چون نقاط غير تحليلي 1و 1- در منحني بسته نيست .

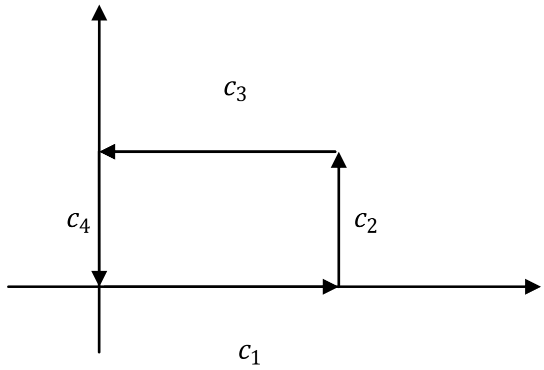


$$6)\quad \oint z^*\,dz \neq 0$$

اين تابع در هيچ کجا مشتق پذير نيست پس در هيچ کجا تحليلي نيست و حاصل انتگرال آن روي هر مسير بسته مخالف صفر است (نمي توان مقدار آنرا از قضيه فوق صفر فرض نمود)



مثال 5- نشان دهید که حاصل انتگرال $\oint z\,dz$ زیر روي مسیر مفروض صفر است ؟



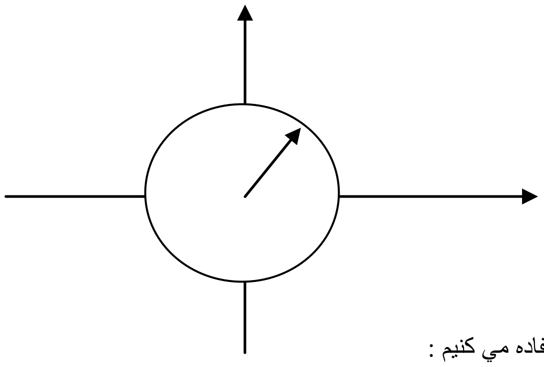
مي دانیم حاصل انتگرال طبق قضیه کوشي صفر است اما مي خواهیم این قضیه را در مورد این مثال اثبات کنیم :

$$\oint z\,dz = \int_{c_1} z\,dz + \int_{c_2} z\,dz + \int_{c_3} z\,dz + \int_{c_4} z\,dz$$

$$z = x + jy \quad => \quad dz = dx = jdy$$

با جایگذاري عباراتz و dz مي توان به این نتیجه رسید که حاصل انتگرال برابر صفر خواهد بود .

مثال 6- جواب انتگرال $\oint z^*\,dz$ را روي مسیر زیر محاسبه و در مورد آن بحث کنید ؟



چون منحني داده شده دایره است از حالت قطبي استفاده مي کنیم :

$$z^* = e^{-j\theta} \quad \& \quad dz = je^{j\theta}\,d\theta$$

$$=> \quad \oint e^{-j\theta}\, je^{j\theta}\,d\theta = \oint j\,d\theta = j\int_0^{2\pi} d\theta \quad => \quad \oint z^*\,dz = 2\pi j$$

نکته : عوض شدن جهت مسیر علامت جواب را تغییر مي دهد . به عنوان مثال در مثال قبل اگر جهت در جهت ساعتگرد بود جواب $-2\pi j$ مي شد .

محاسبه انتگرال هاي توابع غیر تحلیلي روي مسیر هاي بسته با استفاده از قضیه مانده ها :

قضیه مانده ها راه حل ساده اي براي محاسبه انتگرال توابع مختلط غیر تحلیلي روي مسیر هاي بسته اریه مي نماید .

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi j\left[\sum \mathrm{Res}\{f(z)\}\right]$$

تعریف مانده یك تابع مانند *f(z)* در نقطه اي مانند z_0 :

الف) اگر تابع *f(z)* در نقطه $z = z_0$ داراي ریشه ساده باشد کافي است جمله$z - z_0$ را حذف نموده و در بقیه عبارات به جايz ها z_0 قرار دهیم .

ب) اگر *f(z)* در نقطه $z = z_0$ داراي ريشه تكراري از درجهn باشد آنگاه كافي است عبارت $(z-z_0)^{\mathrm{n}}$ را حذف نموده از كل عبارت *n-1* بار مشتق گرفته و بر *(n-1)!* تقسيم نماييم .

$$Res\left\{\frac{q(z)}{(z-z_0)^{\mathrm{n}}}\right\} = \frac{q(z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

مثال 7- مانده تابع $f(z) = \frac{z-1}{z(z+1)(z-2)(z+2)}$ را در تمام نقاط غير تحليلي آن محاسبه كنيد ؟

تابع فوق داراي ريشه هاي صفر و1- و 2 و 2- مي باشد لذا مانده تابع را در اين نقاط محاسبه مي كنيم :

$$Res\{f(z)\} = \frac{-1}{1(-2)(2)} = \frac{1}{4}$$

$$Res\{f(z)\} = \frac{-1-1}{-1(-1-2)(-1+2)} = \frac{2}{3}$$

$$Res\{f(z)\} = \frac{2-1}{2(2+1)(2+2)} = \frac{1}{12}$$

$$Res\{f(z)\} = \frac{-2-1}{-2(-2+1)(-2-2)} = \frac{3}{8}$$

مثال 8- مانده تابع $f(z) = \frac{z-1}{z(z-2)^2}$ را در تمام نقاط غير تحليلي آن محاسبه كنيد ؟

تابع فوق داراي ريشه هاي صفر و 2 مي باشد لذا مانده تابع را در اين نقاط محاسبه مي كنيم :

$$Res\{f(z)\} = \frac{0-1}{(0-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$Res\{f(z)\} = \frac{\left(\frac{z-1}{z}\right)'}{(2-1)!} = \frac{1}{4}$$

مثال 9- مانده تابع $f(z) = \frac{z-1}{z^2(z-1)^2}$ را در تمام نقاط غير تحليلي آن محاسبه كنيد ؟

تابع فوق داراي ريشه هاي صفر و 1 مي باشد لذا مانده تابع را در اين نقاط محاسبه مي كنيم :

$$Res\{f(z)\} = \frac{\left(\frac{z+1}{(z-1)^2}\right)'}{1!} = -1$$

$$Res\{f(z)\} = \frac{\left(\frac{z+1}{z^2}\right)'}{1!} = -3$$

حال با استفاده از قضيه مانده ها و فرمول

$$\oint \mathrm{f(z)\ dz} = 2\pi \mathrm{j}\left[\sum \mathrm{Res\{f(z)\}}\right]$$

در جهت دايره مثلثاتي مي توان جواب هر انتگرال تابع مختلط را روي هر مسير بسته دلخواه را بدست آورد .

کاربرد انتگرال های مختلط :

الف) محاسبه انتگرال هاي ناصره حقيقي : بعضي از انتگرال هاي ناصره حقيقي را مي توان با استفاده از انتگرال مختلط حل نمود.
فرض کنید بخواهیم انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}dx$ را حل کنیم که انتگرال تابع $\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}$ موجود نیست یا نمي توان تابع اولیه اي براي آن پیدا نمود در این حالت اگر $p(x)$ و $q(x)$ داراي شرایط زیر باشند مي توان با تبدیل این انتگرال به يك انتگرال مختلط حل آن را امکانپذیر نمود .

1 - $P(x)$ و $q(x)$ نسبت به هم از درجه اول باشند (مثل $\frac{1}{x+1}$)
2 - $q(x)=0$ فقط ریشه هاي مختلط داشته باشد .

اگر این شرایط تواما برقرار باشند آنگاه از فرمول زیر براي محاسبه انتگرال ناصره مفروض استفاده نمود .

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}dx=\oint\frac{p(z)}{q(z)}dz=2\pi j\left[\sum Res\left\{\frac{p(z)}{q(z)}\right\}\right]$$

مثال 10 – با استفاده از فرمول فوق جواب انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}^4+5\mathrm{x}^2+4}dx$ را بدست آورید ؟

$$2x^2-1=0 \quad => \quad \mathrm{x}^2=\frac{1}{2}$$

قرار دادن $\frac{1}{2}$ در مخرج . در صورت صفر شدن– مخرج به صورت بخش پذیر است . با توجه به $\frac{1}{2}$ مخرج به صورت بخش پذیر نیست و شرط اول صادق است .

$$\mathrm{x}^2=X \quad => \quad \mathrm{X}^2+5X+4 \quad => \quad X=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=-4\ \&1$$

در نتیجه ریشه هاي مخرج برابر $\pm 2j$ و $\pm j$ خواهد بود و با توجه به فرمول فوق فقط مقادیر مثبت در نظر گرفته مي شود و شرط دوم نیز صادق است .

$$=> \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}^4+5\mathrm{x}^2+4}dx=\oint\frac{2\mathrm{z}^2-1}{\mathrm{z}^4+5\mathrm{z}^2+4}dz=\oint\frac{2\mathrm{z}^2-1}{(z+2j)(z+j)(z-j)(z-2j)}dz$$

$$=2\pi j\left\{\frac{2j^2}{(j+2j)(j+j)(j-2j)}+\frac{2(2j)^2-1}{(2j+2j)(2j+j)(2j-j)}\right\}=2\pi j\left\{\frac{-3}{6j^2(-j)}+\frac{-9}{12j^2j}\right\}=\frac{\pi}{2}$$

نکته : پاسخ این گونه انتگرال ها بایستي حقيقي باشد و j در محاسبات حذف شود .

مثال 11- حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{x}^2+1}dx$ را با استفاده از روش معمول و روش فوق بدست آورید ؟

روش معمول :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}=tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

روش فوق :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$$

در $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{x}^2+1}dx$ دو شرط برقرار است و داریم :

$$\oint\frac{1}{z^2+1}dz=\oint\frac{1}{(z-j)(z+j)}dz=2\pi j[Res\{f(z)\}]=\pi$$

$$=> \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$$

نکته : $\int_{-a}^{a}$ زوج $= 2\int_{0}^{a}$

ب) محاسبه انتگرال هاي مثلثاتي : منظور حل انتگرال هايي به صورت$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos \alpha x \, dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin \alpha x \, dx$ مي باشد .
اگر در عبارت فوق نيز $p(x)$ و $q(x)$ داراي شرايط قبل باشند مي توان اين دو انتگرال خاص را نيز از روش مختلط حل نمود .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos \alpha x \, dx = Re\left[2\pi j \sum Res \frac{p(z)}{q(z)} e^{j\alpha z}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin \alpha x \, dx = Im\left[2\pi j \sum Res \frac{p(z)}{q(z)} e^{j\alpha z}\right]$$

مثال 12- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = ?$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \cos x \, dx = Re\left\{2\pi j \; Res\left[\frac{1}{z^2+1} e^{jz}\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{2\pi j \; \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-j)(z+j)} e^{jz}\right]\right\} = \frac{\pi}{e}$$

مثال 13- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \sin 3x \, dx = ?$

$Sin\ 3x$ فرد و $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ زوج است و حاصلضرب اين دو تابع فرد است در نتيجه انتگرال تابع فرد در بازه منفي بي نهايت و بي نهايت صفر است .

$$= Im\left[2\pi j \sum Res \; \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{j3z}\right]$$

ريشه هاي مخرج j و $-j$ مي باشد و با توجه به تعريف فوق فقط كافي است مانده تابع فوق را در j محاسبه نماييم :

$$Res\left\{\frac{1}{(z-j)^2(z+j)^2} e^{j3z}\right\} = \frac{\left(\frac{1}{(z+j)^2} e^{j3z}\right)'}{1!} = \frac{j\left(\frac{-12}{e^3} - \frac{4}{e^3}\right)}{16}$$

$$=> \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} \sin 3x \, dx = \mathrm{Im}\left[2\pi j \frac{j\left(\frac{-12}{e^3} - \frac{4}{e^3}\right)}{16}\right] = 0$$

خلاصه :

قضيه كوشي ريمان : اگر انتگرال مختلط $f(z)$ روي مسير باز c تحليلي باشد آنگاه اين انتگرال قضيه بستگي ندارد و فقط به نقاط ابتدا و انتها وابسته است .

قضيه انتگرال كوشي روي منحني بسته : اگر تابع $f(z)$ روي منحني بسته c و در داخل آن تحليلي باشد آنگاه حاصل انتگرال روي مسير بسته برابر صفر است .

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi j\left[\sum Res\{f(z)\}\right]$$

تعريف مانده يك تابع مانند $f(z)$ در نقطه اي مانند z_0 :

الف) اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ داراي ريشه ساده باشد كافي است جمله $z - z_0$ را حذف نموده و در بقيه عبارات به جاي z ها z_0 قرار دهيم .

ب) اگر $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ داراي ريشه تكراري از درجه n باشد آنگاه كافي است عبارت $(z-z_0)^{\mathrm{n}}$ را حذف نموده از كل عبارت $n-1$ بار مشتق گرفته و بر $(n-1)!$ تقسيم نماييم .

$$Res\left\{\frac{q(z)}{(z-z_0)^{\mathrm{n}}}\right\} = \frac{q(z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

كاربردهاي انتگرال هاي مختلط :

الف) محاسبه انتگرال هاي ناصره حقيقي : با شرايط $P(x)$ و $q(x)$ نسبت به هم از درجه اول باشند & $q(x)=0$ فقط ريشه هاي مختلط داشته باشد .

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}dx = \oint\frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi j\left[\sum Res\left\{\frac{p(z)}{q(z)}\right\}\right]$$

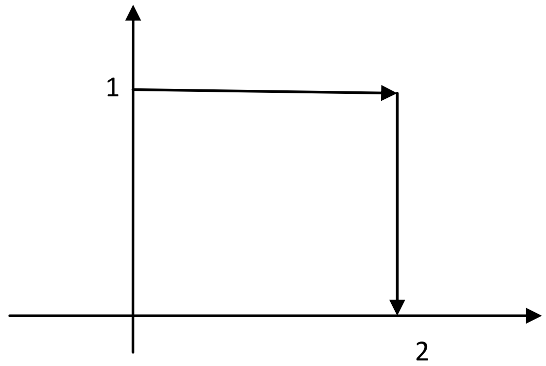
ب) محاسبه انتگرال هاي مثلثاتي : با شرايط فوق

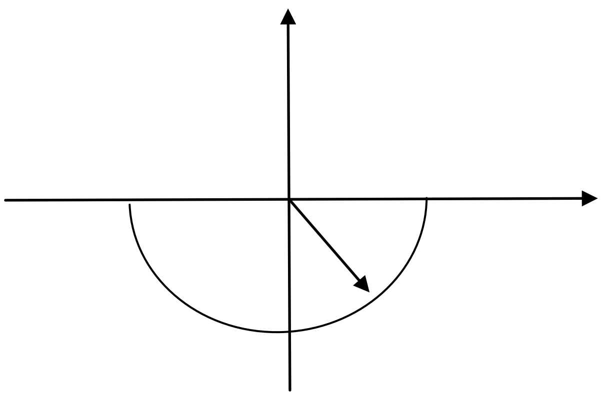
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}\cos\alpha\mathrm{x}\,dx = Re\left[2\pi j\sum Res\frac{p(z)}{q(z)}e^{j\alpha z}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}\sin\alpha\mathrm{x}\,dx = Im\left[2\pi j\sum Res\frac{p(z)}{q(z)}e^{j\alpha z}\right]$$

تمرينات آخر فصل :

انتگرال تابع $f(z) = z^2 + 2$ را روي مسير هاي زير محاسبه كنيد ؟





حاصل انتگرال هاي زير را بدست آوريد ؟

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

2) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

پاره اي تبديلات مورد نياز :

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin(2k\pi-\frac{k\pi}{2})=\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$$

$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\pm\sin A\sin B$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$$

$$sin^2A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2A$$

$$cos^2A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2A$$