جلسه اول

خطاها

محاسبات عددی شاخه‌ای از علم ریاضیات است که به کمک عملیات ماشینی جواب مسائل تحلیلی در ریاضیات را تقریب می‌زند.

خطاها:

معمولاً برای حل هر مسئله‌ای ابتدا برای آن یک مدل ریاضی طراحی می‌شود و سپس با استفاده از روش‌های موجود یا روش‌های ابداعی، مدل را حل می‌کنیم. از شروع مدل‌سازی تا پایان به دست آوردن جواب، مرتکب خطاهایی می‌شویم.

منابع خطا:
- خطای مدل
- خطای اندازه‌گیری
- خطای نمایش عدد
- خطای روش
- خطای اعمال محاسباتی

سعی می‌کنیم این خطاها را کاهش دهیم.

با فرض محدودیت حافظه ماشین، عدد کلی a به صورت $fl(a)$ ذخیره می‌شود.

اگر a و b هر دو عدد حقیقی باشند:

$$fl(\,fl(a) + fl(b)\,)$$

فرض: ماشین تا ۳ رقم شناور نگهداری می‌کند پس عدد اول به صورت fl و عدد دوم نیز به صورت fl ذخیره می‌شود.

1,3574

1,2852

$fl(1,35741) = 1,357$

$fl(1,2852) = 1,285$

$fl(fl(a) + fl(b)) = fl(2,6412) = 2,647$

$fl(a) = \pm 10^{q}(0/d_1 d_2 \ldots) \; ; \; q \in \mathbb{Z} \; , \; d_1 \neq 0$

پس باید عدد بالا به صورت زیر باشد

$0/1357 \times 10^{1}$

روش ذخیره اعداد: روش گرد کردن
روش قطع کردن

در ماشین‌ها دو روش برای ذخیره اعداد تقریبی وجود دارد:

یک: روش قطع کردن (Chopping)

دو: روش گرد کردن (Rounding)

در روش اول اگر بخواهیم t رقم را در ماشین ذخیره کنیم رقم t+1 ام به بعد را دور می‌ریزیم.

در روش دوم: فرض عددها به صورت زیر باشد

$$a = d_1 d_2 \cdots d_m / b_1 b_2 \cdots b_t \, b_{t+1} \cdots$$

هدف: t رقم بعد از اعشار را می‌خواهیم نگه داریم:

(1) اگر $b_{t+1} > 5$ پس به b_t یک واحد اضافه می‌کنیم و از رقم t+1 به بعد را قطع می‌کنیم

(2) اگر $b_{t+1} < 5$ " از رقم t+1 به بعد را نگه نمی‌داریم

(3) اگر $b_{t+1} = 5$ در این حالت اگر بعد از b_{t+1} رقم ناصفر باشد مثل (1) عمل می‌کنیم اما اگر

(4) $b_{t+1} = 5$ و بعد از b_{t+1} رقم نباشد یا همه رقم صفر باشد در این صورت

اگر b_t زوج باشد مثل (2) و اگر b_t فرد باشد مثل (1) عمل می‌کنیم

تا ۳ رقم بعد از اعشار گرد کنید.

$fl(14,582500) = 14,582$

قضیه: فرض کنید $fl(a)$ تقریب ممیز شناور عدد a باشد در این صورت

$$|a - fl(a)| \leq 5 \times |a| \times p \times 10^{-t}$$

t همان t رقم بعد از اعشار است.

$$p = \begin{cases} 1 & \text{گرد کردن} \\ 2 & \text{قطع کردن} \end{cases}$$

وقتی ما تغییراتی های ممیز شناور تغییر می کنند $a \times 10^{b} \rightarrow$ عدد صحیح

$t \rightarrow \infty$ میل دهیم تقریب دقیق تری می شود.

چون بالای خطا در گرد کردن کمتر از قطع کردن است. پس از گرد کردن استفاده می کنیم.

تعریف نمایش اعشاری یک عدد:

منظور از نمایش اعشاری عدد a ، نمایش آن به صورت زیر است:

$$a = a_m \times 10^{m} + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots$$

حلسه دوم

$a_m \neq 0$ & $m \in Z$; $0 \leq A_i \leq 9$

اگر نمایش اعشاری مختوم است .

قضیه : اگر A یک عدد حقیقی مثبت باشد A دارای یک نمایش اعشاری منحصر به فرد زیر است

$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$ $\quad 0 \leq a_i \leq 9$, $a_m \neq 0$

به شرطی که از یک جا به بعد همه a_i ها 9 نباشند .

مثلا نباشد

$9 \times 10 + 9 \times 10^{-1} \dots$

قضیه : اگر نمایش اعشاری عدد A مختوم یا نامختوم متناوب باشد آنگاه A یک عدد گویا است .
دارای یک نمایش اعشاری نامختوم است . $\frac{1}{9}$

نتیجه : اگر ~~...~~ A مثبت یا اصم باشد نمایش اعشاری A نامختوم و نامتناوب است

نتیجه : اگر a برد شده A تا n رقم پس از اعشار باشد آنگاه

$$|a - A| \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

اگر

تبدیل اعداد از مبنای ۱۰ به مبنای ۲ :

ب- اعداد در مبنای ۲ :

اعداد صحیح :

از روش تقسیمات متوالی استفاده می‌کنیم .

اعداد اعشاری :

$$(x)_{10} = (?)_2 = (0/b_1 b_2 b_3 \ldots)_2$$

$$A_1 = 0/b_1 b_2 b_3 \ldots = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \ldots$$

$$2A_1 = b_1 + \underbrace{b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \ldots}_{<1}$$

$$\Rightarrow [2A_1] = b_1$$

$$A_2 = 2A_1 - b_1 = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \ldots$$

$$2A_2 = b_2 + b_3 \times 2^{-1} + \ldots$$

$$\Rightarrow [2A_2] = b_2 \;\&\; A_3 = 2A_2 - b_2$$

$$\Rightarrow b_i = [2A_i] \qquad A_{i+1} = 2A_i - b_i$$

وقتی بی‌ها صفر شد تمام می‌کنیم .. یا اینکه A_i تکراری شود .

روند زمانی ختم می‌شود که در مرحله‌ای A_i صفر شود یا A_i تکرار شود و یا اینکه تکرارهای معینی در نظر باشد. در محاسبات دستی از جدول زیر استفاده می‌کنیم

i	A_i	$2A_i$	$b_i = [2A_i]$	$A_{i+1} = 2A_i - b_i$
1	$1/7$	$2/7$	0	$2/7$
2	$2/7$	$4/7$	0	$4/7$
3	$4/7$	$8/7$	1	$1/7$
A_i تکراری شد	$1/7$			

در مرحله چهارم دوباره ۰۰۱ تکرار می‌شود

می‌خواهیم عدد زیر را بدست آوریم.

$$\left(1/7\right)_{10} = \left(0/\overline{001}\right)_2$$

تمرین:

الگوریتمی بنویسید که یک عدد حقیقی را بخواند بخش صحیح و اعشاری آن را جدا کند و هر کدام را به مبنای ۲ تبدیل کند و نمایش عدد را در مبنای ۲ چاپ کند؟

Scanned with CamScanner

نمایش علمی یک عدد :

فرض کنید A عددی ناصفر باشد . نمایش $A = a \times 10^{b}$ را که

$1 \le a < 10$ و $b \in \mathbb{Z}$ نمایش علمی A می نامیم .

a : مانتیس

$125/00 \rightarrow 1/2500 \times 10^{+2}$

تعریف ارقام بامعنا :

فرض کنید a عددی اعشاری باشد ، $1 \le |a| < 10$ در این صورت ارقام

بامعنای a عبارتند از ارقام ناصفر a ، صفرهای بین ارقام ، صفرهای که

به منظور دقت جلوی این ارقام قرار می گیرند .

در حالت کلی ارقام بامعنای آن عدد همان ارقام بامعنای مانتیس آن عدد است .

۲ تا ارقام بامعنا $= \; 7/5 \times 10^{-3} = 0/0075$

انواع خطا :

– اگر a تقریبی از A باشد ،

خطای مطلق a را با $e(a)$ نشان می دهیم .

$$e(a) = |A - a|$$

همیشه حطای مطلق را نمی‌توانیم داشته باشیم

مثال / $A = \frac{n+1}{n}$

برای nهای بزرگ A کم است.

$A = 1$

$$e(a) = \left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

- خطای مطلق حدی :

اگر a تقریبی از A باشد ~~...~~ هر عدد نا کمتر از e(a)

یک خطای مطلق حدی a می‌نامیم و با e_a نشان می‌دهیم

$$|A-a| \leq e_a \Rightarrow a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

$$\Rightarrow A \in [a - e_a , a + e_a]$$

- خطای نسبی :

اگر a تقریبی از A باشد

$$\delta(a) = \frac{|A-a|}{|A|}$$

در عمل بهتر است این خطا بکار برده شود. %

$\frac{1}{3} \longrightarrow 0/3 \xrightarrow{\text{خطا}} 0/0\bar{3}$ خطای مطلق

$\frac{100}{3} \longrightarrow 33/3 \xrightarrow{\text{خطا}} 0/0\bar{3}$ خطای مطلق

دومی بهتر است چون دومی از ۱۰۰ واحد این خطا را متحمل شده است.

توضیح: اگر a تقریبی از A باشد،

$$\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

نتیجه:
اگر e_a در مقایسه با $|a|$ خیلی کوچک باشد پس

$$\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a|}$$

به عنوان تقریب $\delta(a) \simeq \frac{e_a}{|a|}$ می‌بریم.

مثال: اگر $a = 1{,}41$ تقریبی از $A = \sqrt{2}$ باشد خطای نسبی a را حساب کنید

یعنی $\delta(a)$ را حساب کنید؟

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

$$\Rightarrow 0{,}004 < \underbrace{\sqrt{2} - 1{,}41}_{e(a)} < 0{,}005$$

$$\Rightarrow e_a = 0{,}005$$

$$\delta(a) \simeq \frac{0{,}005}{1{,}41} =$$

تعریف ارقام با معنای درست یک تقریب :

فرض کنید $a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots$ به طوری که $a_m \neq 0$ و $0 \le a_i \le 9$

تقریبی از عدد A و d تعداد ارقام با معنای a باشد. در این صورت بزرگترین

عدد صحیح نامنفی $n \le d$ به طوری که $|A-a| \le 5 \times 10^{m-n}$ تعداد

ارقام با معنای درست a نامیده می‌شود.

می‌دانیم که $10^m \le a < 10^{m+1}$ است. از طرفین لگاریتم می‌گیریم

$$m \le \log_{10} a < m+1$$

$$\Rightarrow m = [\log_{10} a]$$

$m = 2 \leftarrow a = 123.7$

$m = 0 \leftarrow a = e^{1/3}$

مثال / از $A = 8/00$ دو تقریب $a = 7/997$ و $a' = 8/08$ داریم.

$a = 7/997 \rightarrow m = 0 \rightarrow e(a) = 0/003$

$0/003 \leq 5 \times 10^{-n} \Rightarrow \boxed{n = 3}$

$a' = 8/08 \Rightarrow m = 0$ & $e(a') = 0/08$

$0/08 \leq 5 \times 10^{-n} \Rightarrow \boxed{n = 1}$

پس تقریب $a = 7/997$ دقیق‌تر است.

تمرین: فرض کنید $A = 100$ دو تقریب $a = 99/98$ و $a' = 100/4$

تعداد ارقام با معنای درست این دو را حساب کنید؟

قضیه: اگر a تقریبی از A با n رقم با معنای درست باشد و $b = 10^K \times a$،

$B = 10^K \times A$ در این صورت b نیز دارای n رقم با معنای درست است.

قضیه: اگر a گرد شده عدد مثبت A تا n رقم بعد از اعشار باشد، آنگاه

a دارای n رقم با معنای درست است.

قضیه: اگر a تقریبی از A دارای n رقم با معنای درست باشد، خطای نسبی a از 5×10^{-n} کمتر است.

مثال/ تقریبی از π را بیابید، خطای نسبی آن از 10^{-5} کمتر باشد.

$$5\times10^{-6} < 10^{-5}$$

بنابراین تقریبی بزنیم دارای ۶ رقم با معنای درست باشد. پس کافی است طبق

تقسیم کافی است ١٦ را تا ٦ رقم بعد از اعشار ببریم.

انتشار خطا:

۱/ جمع اعداد تقریبی:

اگر a تقریبی از A و b تقریبی از B باشد

$$\begin{cases} e(a+b) \leq e(a)+e(b) \\ \delta(a+b) \leq \max\{\delta(a), \delta(b)\} \end{cases}$$

۲/ تفریق اعداد تقریبی:

اگر a تقریبی از A و b تقریبی از B باشد

$$\begin{cases} e(a-b) \leq e(a)+e(b) \\ \delta(a-b) \leq \dfrac{e(a-b)}{|a-b|} \end{cases}$$

خیلی ناقص است

از تفریق اعداد تقریبی اجتناب کنید

ج/ ضرب اعداد تقریبی:

$$\begin{cases} e(ab) \leq a\,e(b) + b\,e(a) \\ \delta(ab) \leq \delta(a) + \delta(b) \end{cases}$$

از ضرب اعداد تقریبی خودداری کنید

اولاً حواس جمع کنید ۲ طرف و اعدادهای مختلف ...

ثانیاً دقت را مضاعف کنید. ... تا ۲ رقم بکنید.

د/ تقسیم اعداد تقریبی:

از تقسیم پرهیز شود

$$\begin{cases} e\left(\frac{a}{b}\right) \leq \cancel{a\,e(b) + b\,e(a)}/b^2 \\ \delta(a/b) \leq \delta(a) + \delta(b) \end{cases}$$

مثال/

$$I_n = \int_0^1 \underbrace{x^n}_{} \underbrace{e^{x-1}}_{u} \underbrace{dx}_{} \quad ; \; n \geq 1$$

dv

برای مراتب مختلف n این انتگرال را محاسبه کنید؟

(بچه‌ها دقت کنید)

$$\xrightarrow[\text{جزء به جزء}]{\text{با انتگرال‌گیری}} I_n = 1 - n\,I_{n-1} \quad ; \; n \geq 2$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 1 \leq 0$$

$$e^{-1} \leq e^{x-1} \leq 1 \xRightarrow{\text{طرفین} \times x^n} x^n e^{-1} \leq x^n e^{x-1} \leq x^n$$

(بچه‌ها دقت کنید)

از طرفین انتگرال معین از ۰ تا ۱ می‌گیریم

$$\Rightarrow \frac{e^{-1}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

فصل دوم ..

حل معادلات غیرخطی
- معادلات متعالی : شامل |x|، $\sin x$، $\cos x$ و ... یا ترکیبی از آنها
- معادلات جبری ← $P_n(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$

معادلات متعالی ..
- تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه؛
- تعیین تقریبی از ریشه؛

تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه؛ :

دو روش
- روش رسم منحنی
- روش جدول‌بندی مقادیر تابع

— روش رسم منحنی :

$f(x)=0$

$f(\alpha)=0$ نزولی $0 > y'$

در این روش ابتدا منحنی $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس محل تلاقی منحنی با محور x ریشه خواهد بود. اما در عمل رسم منحنی $y=f(x)$ کار ساده‌ای نیست، به عنوان مثال تابع $y=x+\cos x$ را نمی‌توان به سادگی رسم کرد.

روش دیگر این است که منحنی $y=f(x)$ را به دو منحنی $f_1(x)$ و $f_2(x)$

به صورت $y=f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ تعریف کنیم. حال اگر α ریشه‌ای

باشد

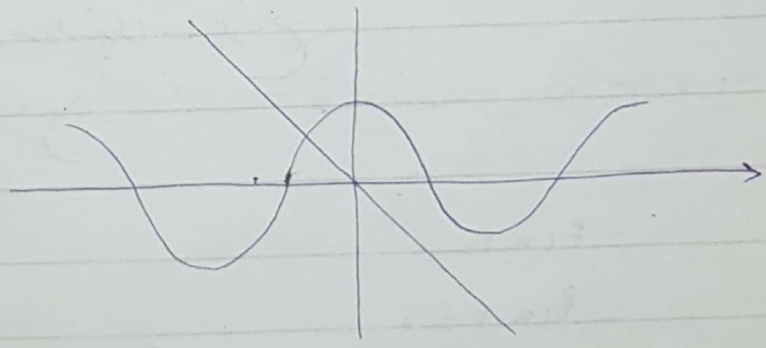
$$f(\alpha)=0 \Rightarrow f_1(\alpha)=f_2(\alpha)$$

یعنی محل تقاطع دو منحنی ... تعداد دقیق ریشه خواهد بود.

$$y=x+\cos x=\cos x-(-x)$$

$f_1(x)=\cos x$

$f_2(x)=-x$



روش جدول‌بندی معادلات:

تعریف: فرض کنید $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$؛ $g(\alpha)\neq 0$ است

اگر $m>1$ باشد، آنگاه α را ریشه تکراری $f(x)=0$ و m را مرتبه تکرار

می‌نامیم.

اگر m زوج باشد علامت $(x-\alpha)$ هر مقداری باشد همیشه مثبت خواهد بود.

و $f(x)$ با علامت $g(x)$ یکی دارد.

قضیه بولتزانو - وایرشتراس

فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ و [illegible] (یعنی [illegible])

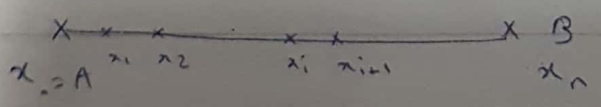
پس c در بازه $[a,b]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=0$

وقتی تابع f یکنوای اکید (یا نزولی یا صعودی) باشد c منحصر به فرد است.

در عمل وقتی بخواهیم ~~ریشه‌های~~ تعداد و محل تقریبی ریشه‌های $f(x)=0$ را در بازه

$[A,B]$ بیابیم بازه $[A,B]$ را به n زیربازه با طول‌های مساوی $h=\frac{B-A}{n}$

تقسیم می‌کنیم.



قرار می‌دهیم

$$\gamma_i = f(x_i)\cdot f(x_{i+1})$$

سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف / $\delta_i > 0$ پس یک ریشه در بازه (x_{i+1}, x_i) وجود دارد.

ب / اگر $\delta_i = 0$ پس x_i یا x_{i+1} یک ریشه است.

ج / اگر $\delta_i < 0$ آنگاه ممکن است $f(x) = 0$ ریشه متوالی با مرتبه فرد یا زوج داشته باشد. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که δ_i منفی یا مثبت باشد و زمانی δ_i منفی می‌شود، باشد این زمان را از دست می‌دهیم.

مثال / $f(x) = \sin x - x + ۰/۵$

تعداد و محل تقریبی ریشه؟

$-۱ \le \sin x \le ۱$

$-۰/۵ - x \le \sin x - x + ۰/۵ \le ۱/۵ - x$

اگر x بزرگ‌تر باشد $۱/۵ - x < ۰$ باشد پس $f(x) < ۰$ ولذا ریشه‌ای در ناحیه $x > ۱/۵$ نیست.

اگر x منفی باشد $-۰/۵ - x > ۰$ باشد پس $f(x) > ۰$ و در ناحیه $x < -۰/۵$ ریشه نداریم.

پس ریشه در صورت وجود در بازه $[-۰/۵ , ۱/۵]$ قرار دارد.

$f'(x) = \cos x - ۱ \le ۰ \Rightarrow$ f اکیداً نزولی $\Rightarrow$ f حداکثر یک ریشه دارد.

x	-۰/۵	۱	۱/۵
$f(x)$	۰/۷۵۲۰۶	۰/۳۴۱۵	-۰/۰۰۲۵

ریشه نزدیک به ۱/۵ قرار دارد.

عدد نزدیکتر به صفر نزدیکتر است. جواب صعودی است

$\Rightarrow \alpha \in (1, 1.5)$

نتیجه.

تعیین تقریبی ریشه های معادله $f(x)=0$:

تعریف همگرایی :
دنباله $\{x_k\}$ از اعداد حقیقی به نقطه α می گوییم همگراست اگر

$$\forall \varepsilon>0 , \exists n\in \mathbb{N} ; \forall k\geq n ; |x_k-\alpha|<\varepsilon$$

$$\lim_{k\to\infty} \{x_k\}=\alpha$$

دنباله صعودی : دنباله $\{x_k\}$ را صعودی می نامیم اگر

$$x_i\leq x_{i+1} \quad ; \forall i$$

دنباله نزولی : دنباله $\{x_k\}$ را نزولی می نامیم اگر

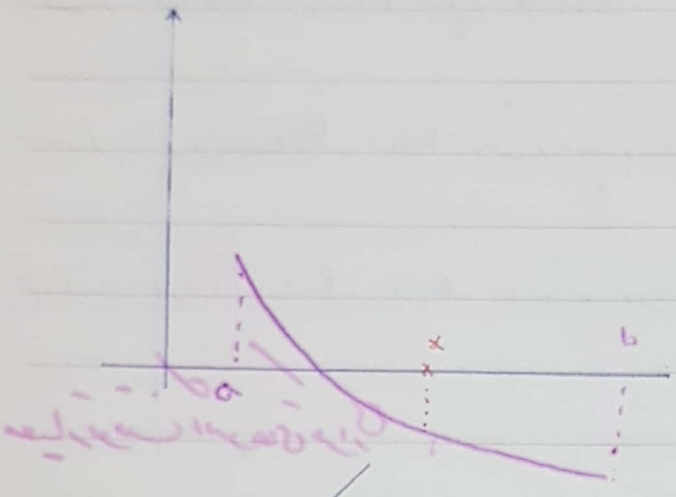
$$x_i\geq x_{i+1} \quad ; \forall i$$

قضیه : اگر k عددی باشد که $|k|<1$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} k^n=0$$

روش اول :

روش تنصیف (دوبخشی) Bysection



در این روش فرض می‌کنیم مثل بازه‌ی بسته $[a,b]$ موجود است به طوری که f بر $[a,b]$

پیوسته است الف

ب / $f(a)f(b)<0$

ج / f در (a,b) دارای تنها یک ریشه باشد.

حال دنباله $\{x_k\}$ از نقاط را به گونه‌ای می‌سازیم که x_k به سمت α برود

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$$

برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

و دو بازه (a,x_1) و (x_1,b) را در نظر می‌گیریم.

الف / اگر $f(a).f(x_1)=0$ پس $x_1=\alpha$

ب / اگر $f(a).f(x_1)<0$ باشد پس بازه حاوی ریشه (a, x_1) است.

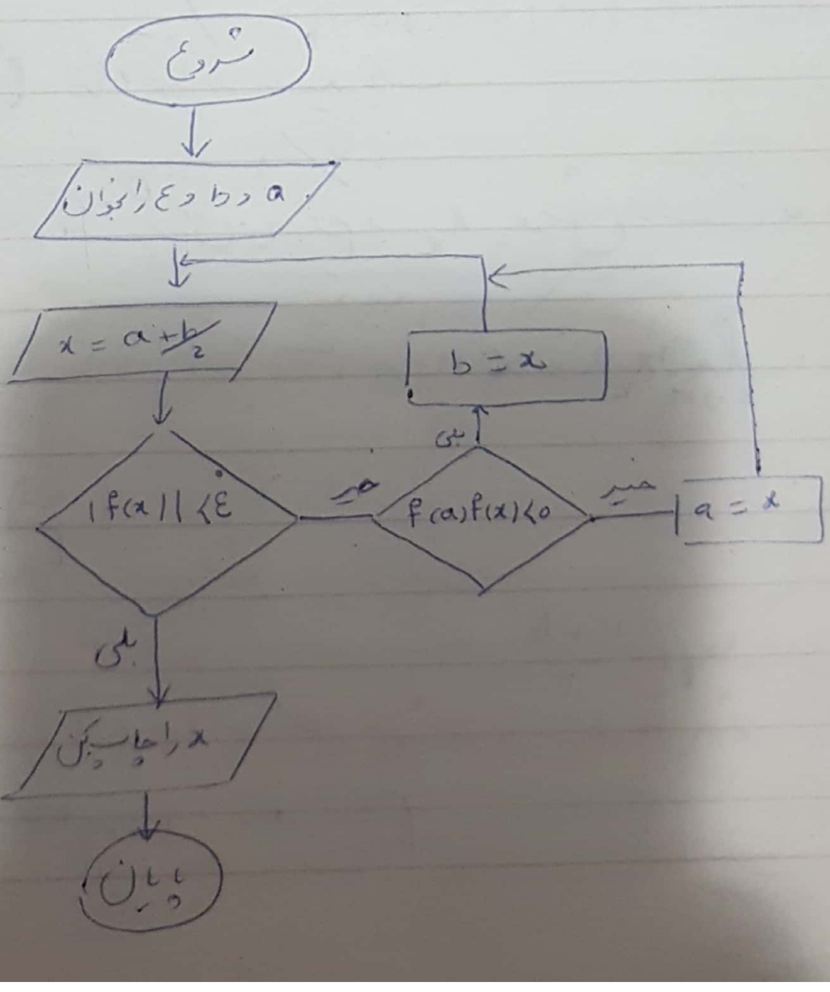
ج / اگر $f(a).f(x_1)>0$ باشد بازه حاوی ریشه (x_1, b) است.

معیار توقف الگوهای تکراری

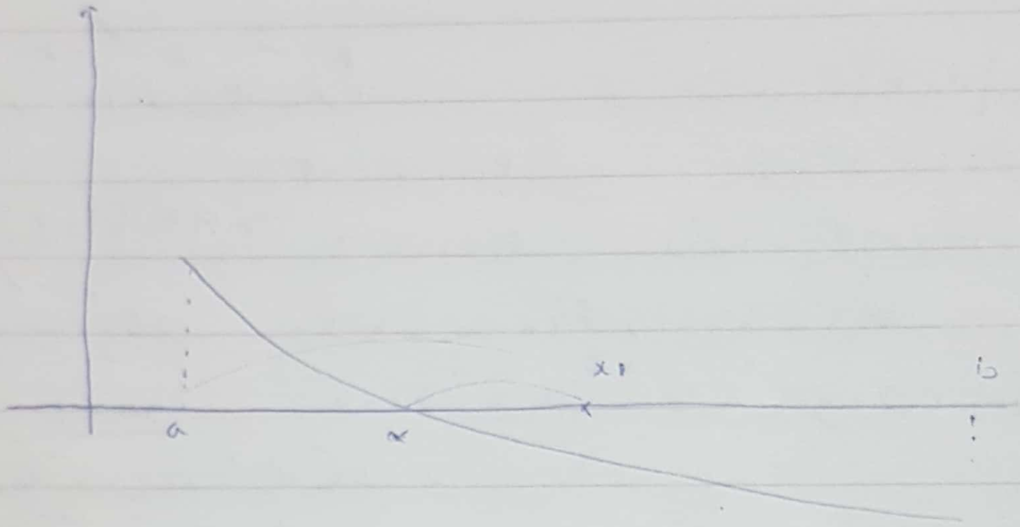
الف / با ε فرض، تکرارها تا جایی ادامه پیدا می‌کنند که $|f(x_k)|<\varepsilon$

ب / با ε فرض، " " " " $|x_k - x_{k-1}|<\varepsilon$

نمودار گردشی روش دو بخشی :



همگرایی روش دو بخشی :



$\frac{b-a}{2}$

با توجه به نحوه بدست آمدن x_i ها داریم :

$$|x_1-\alpha| < \frac{b-a}{2}$$

$$|x_2-\alpha| < \left(\frac{\frac{b-a}{2}}{2}\right) = \frac{b-a}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$0 < \underbrace{|x_n-\alpha|}_{\text{خطای مطلق}} < \frac{b-a}{2^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

با توجه به اینکه $|x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n}$ داریم

حال اگر n به اندازه‌ای بزرگ باشد که $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ آنگاه خطای مطلق تقریب x_n از α

ε کمتر است

همگرایی روش دوبخشی:

$\frac{b-a}{2}$

با توجه به نحوه بدست آمدن x_1 ها داریم:

$$|x_1-\alpha| < \frac{b-a}{2}$$

$$|x_2-\alpha| < \left(\frac{\frac{b-2}{2}}{2}\right) = \frac{b-a}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$0 < \underbrace{|x_n-\alpha|}_{\text{خطای مطلق}} < \frac{b-a}{2^n}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

با توجه به اینکه $|x_n-\alpha| < \frac{b-a}{2^n}$ را داریم.

حال اگر n به گونه‌ای باشد که $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ آنگاه خطای مطلق تقریب x_n از ε کمتر است.

مثال: تقریبی از ریشه مثبت معادله $f(x)=x^2-2=0$ ارائه کنید که خطای مطلق آن از 10^{-2} کمتر باشد.

$f(x)=x^2-2$

$$f(1)=-1,\quad f(2)=2 \Rightarrow \alpha\in(1,2)$$

$$x\in(1,2);\ f'(x)=2x>0$$

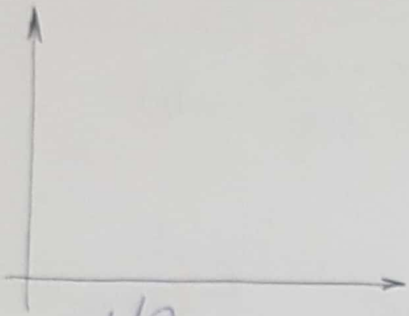
پس دقیقاً یک ریشه دارد

$$\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon \rightarrow \frac{1}{2^n}<10^{-2} \longrightarrow 2^n>100$$

کوچکترین n برابر است با 7 $\boxed{n=7}$

a	b	$x=\frac{a+b}{2}$	$f(a)\,f(x)$
1	2	1,5	−
1	1,5	1,25	+
1,25	1,5	1,375	+
1,375	1,5	1,4375	−
1,375	1,4375	1,4062	+
1,4062	1,4375	1,4218	−
1,4062	1,4218	1,414	+
1,414	1,4218	1,4179	−

روش دوم: روش نابجایی



در این روش فرض می‌کنیم که دو عدد حقیقی a و b موجود باشد طوری که:

الف) f بر $[a,b]$ پیوسته است.

ب) $f(a)f(b)<0$ است.

ج) f بر (a,b) دارای حداقل یک ریشه است.

اول برای بدست آوردن ریشه به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا معادله خط ... بر نقاط $A\big/\begin{smallmatrix}a\\f(a)\end{smallmatrix}$ و $B\big/\begin{smallmatrix}b\\f(b)\end{smallmatrix}$ را می‌نویسیم. محل تقاطع این خط با محور xها تقریبی از ریشه خواهد بود.

$$\frac{y-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

y روی محور xها صفر است. $y=0$

$$\frac{0-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Longrightarrow x=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

اولین تقریب از α

$$\Longrightarrow x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

حال اگر $f(a)f(x_1)<0$ باشد، آنگاه α متعلق به (a,x_1) است و اگر $f(a)f(x_1)>0$ باشد آنگاه $\alpha\in(x_1,b)$ است.

تمرین ۱: برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از روش نابجایی ریشه معادله $x+\cos x=0$ را با دقت 10^{-4} تخمین بزنید.

$[-1,0]$

$\frac{|x_i-x_{i-1}|}{|x_i|}<\varepsilon$ یا $|x_i-x_{i-1}|<\varepsilon$ تکرار تا جایی ادامه یابد که

$|f(x_i)|<\varepsilon$

تمرین 2: برنامه‌ای بنویسید که تقریبی از ریشه مثبت $f(x)=x^2-2=0$ ارائه دهد که خطای مطلق آن از 10^{-5} کمتر باشد؟

برنامه باید ... را محاسبه کنید.

مثال: با استفاده از روش نابجایی تقریبی از ریشه‌های معادله $f(x)=x^2-2=0$ ارائه کنید.

$f(1)f(2)<0 \longrightarrow \alpha\in(1,2)$

$a=1$ $b=2$

$f(a)=f(1)=-1$

$f(b)=f(2)=2$

$$x_1=\frac{1\times 2-2\times(-1)}{2+1}=\frac{4}{3}$$

$$f(x_1)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{9}-\frac{18}{9}=\frac{-4}{9}$$

$\alpha\in(1.\bar{3},2)$

حل ⇐ $a = 1/3$

$b = 2$

$f(a) = -0/31$

$f(b) = 2$

$x_2 = \dfrac{2/6 + 0/62}{2/31} = 1/3$

$f(x_2) = -0/0679$

$(1/39, 2)$ $f(a) = -0/0679$

$f(b) = 2$

$x_3 = \dfrac{2/78 + 0/1358}{2/0679} = 1/41$

$f(1/41) = -0/0119$

$(1/41, 2)$ $f(a) = -0/0119$

$f(b) = 2$

$x_4 = \dfrac{2/82 + 0/0238}{2/0119} = 1/41$

روش سوم: مهم روش تکرار ساده (نقطه ثابت)

در این روش برای تعیین صفرهای معادله $f(x) = 0$ از روی این معادله، معادله‌ای به فرم (با ...... مناسب) $x = g(x)$ استخراج می‌شود.

از روی این معادله الگوی تکراری زیر را می‌سازیم:

$$x_{k+1} = g(x_k) \; ; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

از این الگو اگر نقطه شروع x_0 و تابع $g(x)$ مناسب باشد ثابت می‌شود دنباله $\{x_k\}$ به α، صفر تابع $f(x) = 0$ همگرا خواهد بود.

مثال: فرض کنیم معادله $x^2 + x - 1 = 0$ (معادله طلایی) ریشه مثبت را می‌خواهیم بدست آوریم.

$\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0/6180$ $\qquad x = 1 - x^2$

$g_1(x) = 1 - x^2 \longrightarrow x_{k+1} = g_1(x_k) = 1 - x_k^2$

$g_2(x) = \sqrt{1 - x} \longrightarrow x_{k+1} = g_2(x_k) = \sqrt{1 - x_k}$

$g_3(x) = \dfrac{1}{x + 1} \longrightarrow x_{k+1} = g_3(x_k) = \dfrac{1}{x_k + 1}$

$g_4(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 1} \longrightarrow x_{k+1} = g_4(x_k) = \dfrac{x_k^2 + 1}{2x_k + 1}$

	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
x_0	0/5	0/5	0/5	0/5
x_1	0/75	0/7071	0/6667	0/625
x_2	0/4375	0/5412	0/4	0/4181
x_3	0/8086	0/6774	0/625	0/6180..
⋮				
x_8	0/0990	0/5968	0/6180	
⋮		⋮		
x_{34}		0/6180		

مقدار واقعی را می‌دهد

از همه بهتر

$f(0) = -1$ .... $f(1) = 1$ $\qquad \alpha \in (0, 1)$ $\qquad$ 0/5 گرفتیم

قضیه: اگر f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ باشد و بر هر نقطه از (a,b) دارای مشتق باشد، آنگاه عددی مانند $\eta \in (a,b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b-a)$$

قضیه: اگر g تابعی بر $[a,b]$ ...... $[a,b]$ باشد و بر این بازه $|g'(x)| \leq L < 1$

آنگاه معادله $x=g(x)$ در بازه $[a,b]$ تنها یک ریشه دارد.

قضیه:

روش تکرار تابعی یا نقطه ثابت

قضیه: با شرایط قضیه بالا برای هر x_0 از بازه $[a,b]$ الگوی تکراری .... به تنها ریشه معادله $x=g(x)$ همگرا است.

برهان: فرض کنید α ریشه $x=g(x)$ باشد چون g بر $[a,b]$ به ..... $[a,b]$ است. پس $\alpha \in [a,b]$

$$x_{i+1} - \alpha = g(x_i) - g(\alpha) = g'(\eta_i)(x_i - \alpha) \quad ; \quad \eta_i \in (a,b)$$

$$\Rightarrow |x_{i+1} - \alpha| = |g'(\eta_i)|\,|x_i - \alpha| \Rightarrow |x_{i+1} - \alpha| \leq L\,|x_i - \alpha|$$

$$\Rightarrow i=0 \Rightarrow |x_1 - \alpha| \leq L|x_0 - \alpha|$$

$$i=1 \Rightarrow |x_2 - \alpha| \leq L|x_1 - \alpha| \leq L^2|x_0 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$i=n-1 \Rightarrow |x_n - \alpha| \leq L^n|x_0 - \alpha| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

اکنون نشان می‌دهیم α تنها ریشه این معادله $x=g(x)$ است.

...... : فرض کنیم α_1 و α_2 دو ریشه باشند و $\alpha_1 \neq \alpha_2$ باشند.

$$\alpha_2 - \alpha_1 = g(\alpha_2) - g(\alpha_1)$$
$$= g'(\eta)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

بنابر قضیه ......

$$\Rightarrow |\alpha_2 - \alpha_1| = |g'(\eta)|\cdot|\alpha_2 - \alpha_1| \Rightarrow |g'(\eta)| = 1$$

این تناقض است پس $\alpha_1 = \alpha_2$

$$f(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

$f(0) = -1$ ..... $f(1) = 1 \longrightarrow \alpha \in (0,1)$

$f(0.5) < 0 \,,\, f(1) > 0 \longrightarrow \alpha \in (0.5, 1) = I$

الف) $g_1(x) = 1 - x^2 \longrightarrow g_1'(x) = -2x \longrightarrow |g_1'(x)| = 2x$

$\forall_x (x \in I \,,\, 2x > 1) \Rightarrow$ g_1 مناسب نیست

ب) $g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$g_2'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \qquad |g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

اگر از نقطه نزدیک به ۰/۵ شروع کنیم بهتر است. اگر ۱ نزدیک باشد g' نزدیک ۱ می‌شود از نقطه‌ای شروع می‌کنیم که به ازای آن نقاط $g'(x)$ از یک کمتر باشد

پس باید از نقطه شروع خوبی شروع کنیم.

ج) $g_3(x)=\frac{1}{1+x} \Rightarrow g_3'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow |g_3'(x)|=\frac{1}{(1+x)^2}<\frac{1}{(1+x)^2}<\frac{1}{(1/5)^2}$

به ازای $x=0/5$

مرتبه همگرایی یک دنباله:

تعریف: فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ به α همگراست و اعداد حقیقی و مثبت C و P به گونه‌ای باشند

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^P}\right|=C$$

در این صورت P را مرتبه همگرایی و C را ثابت همگرایی می‌نامیم.

فرض $P=2$ و $C=1$ پس برای n های بزرگ

$$|x_{n+1}-\alpha|\cong C|x_n-\alpha|^P \Rightarrow C=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x_{n+1}-\alpha|}_{\substack{0/1\\0/001}}\cong\underbrace{|x_n-\alpha|}_{\substack{0/1\\0/01}}^{P=2}$$

x_n یک تقریب از α است.

اگر خطای مطلق سمت راست ۰/۱ باشد خطای مطلق چپ ۰/۰۱ است و اگر سمت راست ۰/۰۱ باشد خطای سمت چپ ۰/۰۰۰۱ است یعنی $2x$ می‌شود یعنی به طور کلی P برابر می‌شود.

مرتبه همگرایی روشهای تکراری:

$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}=\alpha$ فرض $x_{n+1}=g(x_n)$

$g(x)$ را حول α می‌نویسیم. ......

$$g(x_n)=g(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)}{1!}g'(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\alpha)+\frac{(x_n-\alpha)^3}{3!}g'''(\alpha)+\cdots$$

$$\Rightarrow x_{n+1}-\alpha=(x_n-\alpha)(g'(\alpha))+\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}g''(\alpha)+\cdots$$

وقتی $n\to\infty$ میل کند $x_n=\alpha$ پس صفر می‌شود.

حال اگر $g'(\alpha)\neq 0$ باشد پس طرفین را بر $x_n-\alpha$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right|=|g'(\alpha)| \longrightarrow P=1,\quad C=|g'(\alpha)|$$

پس اگر $g'\neq 0$ باشد مرتبه همگرایی ۱ است.

اما اگر $g'(\alpha)=0$ باشد و $g''(\alpha)\neq 0$ پس

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}=\frac{g''(\alpha)}{2!}+\frac{(x_n-\alpha)}{3!}g'''(\alpha)+\cdots \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}\right|=\frac{|g''(\alpha)|}{2!}$$

$$\Rightarrow P=2,\quad C=\frac{|g''(\alpha)|}{2!}$$

قضیه: اگر در یک روش تکراری α ریشه معادله $x=g(x)$ است و دنباله $\{x_n\}$ دنباله تکرارها حاصل می باشد. چنانچه $g'(\alpha)\neq 0$ باشد آنگاه مرتبه همگرایی 1 است. اما اگر $g'(\alpha)=0$ باشد و $g''(\alpha)\neq 0$ باشد آنگاه مرتبه همگرایی 2 است و بالاخره اگر $g^{(k)}(\alpha)=0$ باشد آنگاه مرتبه همگرایی حداقل 2 است.

مثال:

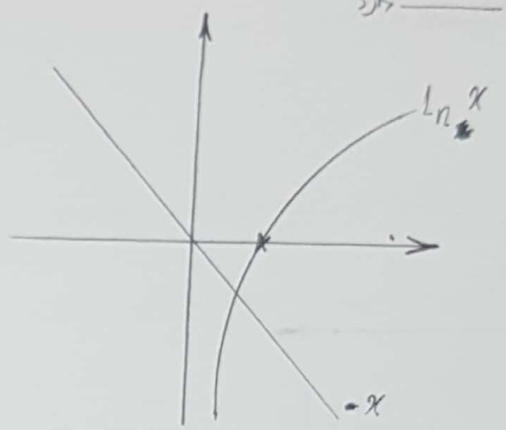
$$f(x)=x+\ln x=0$$

این معادله ــــــ دارد

$$f(1)=1>0$$

$$f(\varepsilon)<0 \implies \alpha\in(0,1)$$

اپسیلون $\varepsilon\to 0$



از روی $x+\ln x$ می خواهیم $g(x)$ بسازیم.

$$x+\ln x=0 \to \ln x=-x \to x=e^{-x}$$

سپس $g(x)=e^{-x} \leftarrow e^{-x}$ نزولی است

$$g'(x)=-e^{-x} \to |g'(x)|=e^{-x}$$

$$\Rightarrow |g'(x)|=e^{-x}<e^{-0}=1$$

چون نزولی است پس بیشترین مقدار آن صفر است.

$x_0=0/5$

$x_1=0/6065$

$x_2=0/5452$

$\vdots$

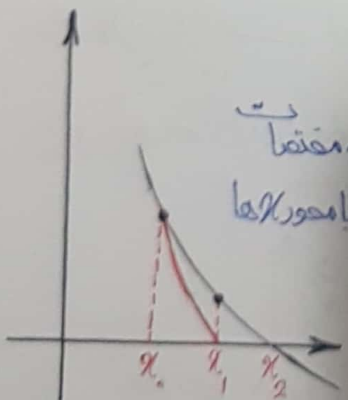
$x_{14}=0/5671$

$$\Longrightarrow g(x)=e^{-x} \Rightarrow x_{n+1}=e^{-x_n}$$

اگر از یک شروع می کردیم ...... همگرایی بیشتری شود.

همیشه $x=g(x) \Rightarrow x_{n+1}=g(x_n)$

روش نیوتن: در روش نیوتن برای تعیین تقریبی از ریشه معادله $f(x)=0$ ابتدا در نقطه ای به مختصات $A\,|\,{x_0 \atop f(x_0)}$ خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ را رسم می کنیم. سپس محل تلاقی این خط با محور x ها تقریبی از ریشه خواهد بود.



$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y=0 \to x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

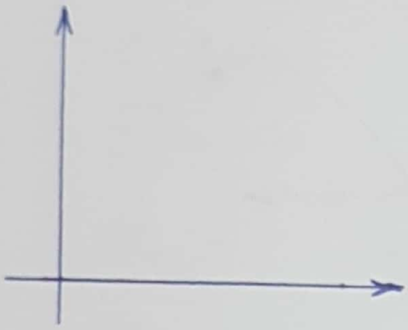
$$\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ;\quad n=0,1,2,3,\ldots$$

به عنوان تمرین

با استفاده از روش نیوتن معادله زیر را حل کنید؟

الف) $3xe^{x} - 1 = ۰$

ب) $x - \cos x = ۰$



سوال ان ←

ایرادات:

- $f'(x_n)$ نباید صفر شود.

-

تمرین: به روش نیوتن تقریبی از معکوس یک عدد مثبت بیابید و با استفاده از آن $1/3$ را بیابید.

قسمت اول جواب
معلوم شود باید نوشته شود

$$f(x) = \frac{1}{x} - a = ۰$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x^۲}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n + \frac{\frac{1 - ax_n}{x_n}}{\frac{1}{x_n^۲}} = x_n + (1 - ax_n)x_n$$

$$x_{n+1} = (۲ - ax_n)x_n$$

$x_۰ = ۰/۳$ $\quad x_{n+1} = (۲ - ۳(۰/۳))(۰/۳)$ $\quad x_۱ = ۰/۳۳$

$x_۲ = (۲ - ۳(۰/۳۳))\, ۰/۳۳ = ۰/۳۳۳۳$

مرتبه همگرایی ۲ است. از هر مرحله تعداد ارقام با معنای درست ۲ برابر شده است.

$x_۳ = ۰/۳۳۳۳\ ۳۳۳۳$

تمرین: با استفاده از روش نیوتن تقریبی از ریشه دوم یک عدد مثبت پیدا کنید؟

$\sqrt{a} = x \qquad f(x) = x^۲ - a = ۰ \qquad f'(x) = ۲x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^۲ - a}{۲x_n} = \frac{x_n^۲ + a}{۲x_n} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{۲}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]$$

$a = ۲ \qquad x_۰ = 1 \qquad \sqrt{۲} \qquad x_۱ = ۱/۵ \qquad x_۲ = ۱/۴۱۶ \qquad x_۳ = ۱/۴۱۴۲۱۵۶۸۶$

$x_۴ = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲$

تعیین ریشه های تکراری α :

در روش نیوتن فرض براین بوده است که $f'(\alpha)\neq 0$ ، α ریشه ، به عبارت دیگر α یک ریشه ساده است
سوال این است که اگر $f'(\alpha)=0$ شد چیکار کنیم؟

$$f(x)=x-\sin x=0$$

$\alpha=0$

تابع پلینوای الیراست.

$$f'(x)=1-\cos x \qquad f'(0)=0$$
$$f''(x)=+\sin x \qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=\cos x \qquad f'''(0)=0$$

یعنی $x=0$ ریشه مرتبه سوم است.

با به کارگیری روش نیوتن

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\sin x_n}{1-\cos x_n}$$

به ازای $x_0=0/5$

$x_1=0/33197$

$x_2=0/22091$

$x_3=0/14717$

$\vdots$

$x_5=0/06547$

$x_6=0/04364$

$x_7=0/02909$

تا ۷ رقم رفتیم تا اینکه یک رقم با معنای درست ساخته شود پس سرعت همگرایی آن کند است. پس روش نیوتن سرعت همگرایی آن کند است.

قضیه: فرض کنید α ریشه $f(x)=0$ باشد و $f'(\alpha)=0$ باشد و نیز m مرتبه تکرار α باشد
در این صورت اگر روش نیوتن به α همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=\frac{m-1}{m}$$

مثلاً برای $n=7$

$$\frac{x_7-\alpha}{x_6-\alpha}\cong\frac{m-1}{m}$$

$$\frac{0/02909}{0/04364}\cong 0/6666$$

تقریباً به سمت $2/3$ می رود.

چون همیشه α را نداریم. پس کاربردی ندارد.

قضیه: تحت شرایط قضیه قبل $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\frac{m-1}{m}$ است.

مثال/

$$\frac{x_7-x_6}{x_6-x_5}\cong\frac{m-1}{m}$$

$$\frac{0/02909-0/04364}{0/04364-0/06547}\cong\frac{m-1}{m}$$

$$\Rightarrow 0/6665\cong\frac{m-1}{m}$$

$m\cong 2/99\ldots$

$m=3$

قضیه:

فرض کنید α ریشه تکراری مرتبه mام تابع $f(x)=0$ باشد و به قدر کافی به α نزدیک باشد. در این صورت دنباله $\{y_n\}$ به α همگراست که در آن

$$y_{n+1}=y_n-m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}\ ;\quad n=0,1,2,\dots$$

مرتبه همگرایی این نوع دنباله حداقل ۲ است.

کاربرد در مثال $f(x)=x-\sin x=0$.

معلوم شد که $\alpha=0$ ریشه مرتبه سوم $f(x)$ است.

$$y_{n+1}=y_n-3\frac{y_n-\sin y_n}{1-\cos y_n}\ ;\quad n=0,1,2,\dots$$

$y_0=0.5\ ,\quad y_1=-0.0040113\ ,\quad y_2=5.3870\times10^{-7}$

اگر α ریشه تکراری مرتبه mام $f(x)=0$ باشد پس: $\leftarrow$

$f'(\alpha)=0$

$f''(\alpha)=0$

$\vdots$

$f^{(m-1)}(\alpha)=0$

$f^{(m)}(\alpha)\neq0$

و این نشان می‌دهد که α برای معادله:

$$h(x)=f^{(m-1)}(x)=0$$

یک ریشه ساده خواهد بود. زیرا

$h(\alpha)=0$

$h'(\alpha)=0$

بنابراین می‌توان روش نیوتن را برای پیدا کردن ریشه ساده معادله $h(x)=f^{(m-1)}(x)=0$ به کار برد.

قضیه:

اگر $m>1$ مرتبه تکرار ریشه معادله $f(x)=0$ باشد. آنگاه این ریشه برای معادله $f^{(m-1)}(x)=0$ ساده خواهد بود و لذا دنباله تکراری $\{y_n\}$ حاصل از روش نیوتن مرتبه همگرایی حداقل ۲ دارد.

$$y_{n+1}=y_n-\frac{f^{(m-1)}(y_n)}{f^{(m)}(y_n)}\ ;\quad n=0,1,2,\dots$$

در مثال قبل

$f(x)=x-\sin x$

$f^{(2)}(x)=\sin x$

$f'''(x)=\cos x$

$$y_{n+1}=y_n-\frac{\sin y_n}{\cos y_n}\Longrightarrow y_{n+1}=y_n-\tan y_n$$

$y_0=0.5$

$y_1=-0.046230$

$y_2=0.000003312$

$y_3=1.2\times10^{-14}$

از همه بهتر است زیرا خیلی نزدیک به صفر است.

معروف به روش‌های اصلاح شده نیوتن

قضیه / تمرین:

ثابت کنید $\alpha=0$ ریشه تکراری مرتبه ۴ام معادله زیر است. با هر دو روش اصلاح شده نیوتن تقریبی از ریشه را بیابید؟

$x^2+2\cos x-2=0$

تقریب ریشه‌های چندجمله‌ای: α

$$(1)\quad P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$$

ریشه‌های این معادله به دو دسته مختلط و حقیقی تقسیم می‌شوند.

حقیقی ← گویاها

ریشه‌های گویا:

قضیه ۱: اگر $r=\dfrac{p}{q}$ یک ریشه گویای معادله (۰) باشد و در آن p و q متعلق به Z هستند و p و q نسبت به هم اول‌اند، آنگاه q/a_n ، p/a_0 را ... می‌کند.

$$P_n(x) \;\Big|\; \frac{x-r}{Q_{n-1}(x)}$$

$$\overline{\quad P_n(r)\quad}$$

قضیه: باقیمانده تقسیم $P_n(x)$ بر $x-r$ برابر است با $P_n(r)$

$P_{..}(x)=2x^4+x^2-4=0$

$\dots,=-4 \longrightarrow P=\pm1 , \pm2 , \pm4$

$a_n=2 \longrightarrow q=\pm1 , \pm2$

$r=\pm1 , \pm\frac{1}{2} , \pm2 , \pm4$

روش ...... برای محاسبه مقدار یک چندجمله‌ای در نقطه‌ای معین:

$$(1)\quad P_n(x)=((((((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\dots)x+a_1)x+a_0$$

قرار می‌دهیم
$$\begin{cases} b_0=a_n \\ b_k=b_{k-1}t+a_{n-k} \;;\; k=1,\dots,n-1 \\ b_n=P_n(t) \end{cases}$$

در محاسبات دستی از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

a_{n-k}	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	.... a_1	a_0
t		$b_0 t$	$b_1 t$		
b_k	$b_0=a_n$	$b_1=b_0t+a_{n-1}$	$b_2=b_1t+a_{n-2}$	.... b_{n-1}	$b_n=P_n(t)$

$P'_n(x) = 3x^5 + x^4 + x^2 + 1$ $\qquad P_5(-2) = ?$

	3	1	0	1	0	1
$t=-2$		-6	10	-20	38	-76
	3	-5	10	-19	38	$-75 = P_5(-2)$

منظور عدد ۱

قضیه: اگر تمام ریشه‌های چندجمله‌ای یک ① حقیقی باشند و داشته باشیم $|x_1| \le |x_2| \le \dots \le |x_n|$ که در آن x_i ها ریشه هستند در این صورت

$$x_n^2 < \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right) = R$$

$$x_1^2 > \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\left(\frac{a_2}{a_0}\right)} = r \implies r \le x_i^2 \le R$$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

کاندیدای ریشه‌ها و حدود ریشه‌ها را بیابید؟

$a_0 = -4$ $\qquad P = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

$a_1 = 8$ $\qquad q = \pm 1$ $\qquad \implies r = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

$a_2 = -5$

$a_n = 1$ $\qquad r = \dfrac{1}{\left(-\frac{8}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{-5}{-4}\right)} = \dfrac{1}{4 - \left(\frac{5}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$

$a_{n-1} = -5$

$a_{n-2} = 8$ $\qquad R = \left(\frac{-5}{1}\right)^2 - 2\left(\frac{8}{1}\right) = 9$

$$\implies 2/3 \le x_i^2 \le 9 \implies r = \pm 1, \pm 2$$

a_{n-k}	1	-5	8	-4
$t=1$		1	-4	4
	1	-4	4	$0 = P_n(1)$

$x=1$ یک ریشه است.

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)($ چندجمله‌ای از درجه ۲ $)$

$x=1$ و $x=2$ ریشه هستند

ریشه‌های ......:

برای پیدا کردن ریشه‌های ...... چندجمله‌ای (۱) از روش نیوتن ورش ...... استفاده می‌کنیم برای این منظور از رابطه بازگشتی زیر استفاده می‌کنیم.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P'_n(x_n)} \; ; \; n = 0, 1, 2, \dots$$

x_0 مناسب الگوی فوق به ریشه همگرا خواهد بود.

قضیه: ضریب خارج قسمت در تقسیم $P_n(x)/x-t$ همان n عدد اول در سطر سوم جدول هورنر است یعنی:

$$\begin{array}{l|l} P_n(x) & x-t \\ \hline & Q_{n-1}(x) \\ \overline{P_n(t)} & \end{array}$$

$$Q_{n-1}(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots \dots b_{n-2} x + b_{n-1}$$

تبصره: تغییر نمادگذاری قبل $P'_n(t) = Q_{n-1}(t)$

مثال: فرض $P_4(2)$ و $P'_4(2)$ را حساب کنید:

$P_4(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 1$

$P_4(2)\ ,\ P'_4(2) = ?$

a_{n-k}	۲	-۳	۵	-۱	۱
$t=2$		۴	۲	۱۴	۲۶
b_k	۲	۱	۷	۱۳	۲۷ = $P_4(2)$
$t=2$		۴	۱۰	۳۴	
	۲	۵	۱۷	۴۷ = $P'_4(2)$	

ریشه های معادله زیر را بیابید:

$x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$

$p = \pm 1$

$q = \pm 1$ $\longrightarrow r = \pm 1$

$P_3(1) = 3 > 0$

$P_3(-1) = -3 < 0$ $\longrightarrow$ معادله ریشه گویا ندارد & $\alpha \in (-1, 1)$;

$P_3(0) = -1 \longrightarrow \alpha \in (0, 1)$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{P_3(x_n)}{P'_3(x_n)}$; $n = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad x_0 = 0/5$

a_{n-k}	۱	۱	۲	-۱
۰/۵		۰/۵	۰/۷۵	۱/۳۷۵
b_k	۱	۱/۵	۲/۷۵	۰/۳۷۵ = $P_3(0/5)$
۰/۵		۰/۵	۱	
	۱	۲	۳/۷۵ = $P'_3(0/5)$	

$x_1 = 0/5 - \dfrac{0/375}{3/75} = 0/4$ $\qquad x_2 = 0/4 - \dfrac{P_3(0/4)}{P'_3(0/4)}$

a_{n-k}	۱	۱	۲	-۱
۰/۴		۰/۴	۰/۵۶	۱/۰۲۴
b_k	۱	۱/۴	۲/۵۶	۰/۰۲۴ = $P_3(0/4)$
۰/۴		۰/۴	۰/۷۲	
	۱	۱/۸	۴/۱۸ = $P'_3(0/4)$	

$\Longrightarrow x_2 = 0/4 - \dfrac{0/024}{3/28}$

$y = f(x)$
$\downarrow$
$y_a = f(a)$

درونیابی: (Interpolation)

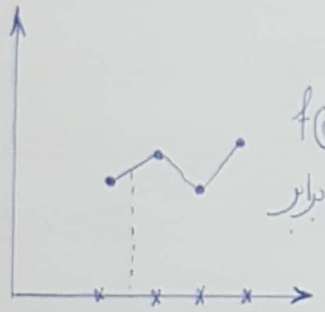
در تمامی توابعی که تا کنون با آن ها سروکار داشتیم متغیر وابسته y به طور صریح برحسب متغیر ... بیان می شد. اما در اغلب کاربردها ضابطه ای برای تابع وجود ندارد یا محاسبه مقدار تابع در تمام نقاط کاری مشکل است در چنین مواردی اغلب نقاطی مانند $x_0, x_1, \dots, x_n$ و مقدار تابع در آن نقاط به صورت $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ داده می شود. بنابراین داده های جدول زیر را داریم.

جدول (۱)

x_i	x_0	x_1	......	x_n
f_i	f_0	f_1		f_n

$x_i < x_{i+1}$ ؛ $i = 0, 1, \dots, n-1$

حال اگر $x \in [x_0, x_n]$ و برای ... $x \neq x_i$ مسأله درونیابی عبارت است از تخمین $f(x)$ و اگر $x \notin [x_0, x_n]$ مسأله تخمین $f(x)$ را مسأله برونیابی می نامیم.



بنابراین به دنبال پیدا کردن تابعی هستیم که اولا این تابع تا حد ممکن رفتار تابع $f(x)$ را تقلید کند ثانیا در نقاط گره ($x_0, \dots, x_n$) مقدار تابع با مقدار چندجمله ای برابر باشد ثالثا به سادگی بتوان از این تابع مشتق و انتگرال گرفت.

توابع چندجمله ای چنین خاصیتی دارند.

بنابراین مسأله درونیابی برای ... جدول (۱) عبارت است از اینکه آیا یک تابع چندجمله ای از درجه n وجود دارد به طوریکه ..... $P_n(x_i) = f_i$ ؛ $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ، $P_n(x)$ را به فرم زیر در نظر می گیریم

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

کافیست ضرایب a_i ها را تعیین کنیم.

درونیابی لاگرانژ:

در این روش فرض می کنیم .... چندجمله ای های از درجه n باشند قرار می دهیم.

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

مثال: ریشه های معادله زیر را بیابید:

$x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$

$p = \pm 1$
$q = \pm 1 \longrightarrow r = \pm 1$

$P_3(1) = 3 > 0$
$P_3(-1) = -3 < 0$ $\longrightarrow$ $\alpha \in (-1, 1)$ & معادله ریشه گویا ندارد

$P_3(0) = -1 \longrightarrow \alpha \in (0, 1)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P_3(x_n)}{P_3'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

فرض $x_0 = 0/5$

a_{n-k}	۱	۱	۲	۱-
۰/۵		۰/۵	۰/۷۵	۱/۳۷۵
b_k	۱	۱/۵	۲/۷۵	۰/۳۷۵ $= P_3(0.5)$
۰/۵		۰/۵	۱	
	۱	۲	۳/۷۵ $= P'_3(0.5)$	

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.375}{3.75} = 0.4 \qquad x_2 = 0.4 - \frac{P_3(0.4)}{P'_3(0.4)} = 0.4 \ldots$$

a_{n-k}	۱	۱	۲	۱-
۰/۴		۰/۴	۰/۵۶	۱/۰۲۴
b_k	۱	۱/۴	۲/۵۶	۰/۰۲۴ $= P_3(0.4)$
۰/۴		۰/۴	۰/۷۲	
	۱	۱/۸	۳/۲۸ $= P'_3(0.4)$	

درون‌یابی لاگرانژ :

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x) = L_1(x) = \dots = L_n(x)$ چندجمله‌ای‌هایی از درجه n باشند. قرار می‌دهیم.

$$P_n(x) = f_0 L_0(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

انتظار می‌رود :

$$P_n(x_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 & j \neq i \end{cases}$$

برای پیدا کردن $L_i(x)$ ها قرار می‌دهیم.

$$L_i(x) = k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$$L_i(x_i) = 1 = k(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$\Rightarrow L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{i=0} f_i L_i(x)$$ $\Rightarrow$ چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ

چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ تابع جدولی زیر را بیابید؟

x_i	1	2	4
f_i	1	0.5	0.25

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{1}{3}(x^2-6x+8)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{1}{2}(x^2-5x+4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{3}(x^2-6x+8) - \frac{1}{4}(x^2-5x+4) + \frac{1}{24}(x^2-3x+2)$$

$$= \frac{3}{24}x^2 - \frac{21}{24}x + \frac{21}{12} = \frac{1}{8}(x^2-7x+14)$$

ایراد روش لاگرانژ:

۱- محاسبات طولانی است.

۲- با افزودن یک نقطه جدید تمام محاسبات باید دوباره انجام شود.

دستور درونیابی نیوتن برحسب .... تقسیم شده

فرض کنیم یک تابع جدولی به صورت زیر داریم:

x_i	x_0	x_1	...... x_n
f_i	f_0	f_1	...... f_n

می‌توان نشان داد چندجمله‌ای های ۱، $(x-x_0)$ ، $(x-x_0)(x-x_1)$ ...... $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ مستقل خطی هستند لذا قرار می‌دهیم:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-\cdots) \quad (1)$$

حال باید مجهولات a_i ها را تعیین کنیم برای تعیین a_i ها توجه داریم که:

$P_n(x_i) = f_i \qquad i=0, \ldots, n$

$f_0 = P_n(x_0) = a_0 \qquad a_0 = f_0$

$f_1 = P_n(x_1) = f_0 + a_1(x_1-x_0) \Rightarrow a_1 = \dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$

به همین ترتیب اگر ادامه دهیم تمام a_i ها محاسبه خواهند شد.

برای سهولت محاسبه a_i ها تنها ..... تقسیم شده را فرض می‌کنیم:

$f[x_i] = f_i$: تفاضل تقسیم شده مرتبه سوم در x_i

$f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$: ~ ~ ~ اول در x_i , x_{i+1}

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$: ~ ~ ~ دوم در x_i , x_{i+1} , ...

$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$: ~ ~ k ام در نقاط x_i , x_{i+1} , ... x_{i+k}

x_i	f_i			
x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
x_3	f_3			

قضیه: در چندجمله‌ای $P_n(x)$ در رابطه (۱) داریم:

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots\dots, x_n]$$

با توجه به آن:

$$P_n(x) = f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots\dots$$
$$+ f[x_0, x_1, \dots\dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots\dots(x - x_{n-1})$$

چندجمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده بیابید:

x_i	۱	۲	۴
f_i	۱	۱/۲	۱/۴

x_i	f_i			
۱	۱			
		$\frac{\frac{1}{4} - 1}{2 - 1} = -\frac{1}{2}$		
۲	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$	
		$\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{4 - 2} = -\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{40}$
۴	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{40}$	
		$\frac{0/2 - \frac{1}{4}}{5 - 4} = -\frac{1}{20}$		
۵	۰/۲			

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{8}(x - 1)(x - 2)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}(x^2 - 7x + 14)$$

فرض می‌کنیم نقاط ..... و ..... را اضافه کردیم، انتها:

$$P_3(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 7x + 14) - \frac{1}{40}\underbrace{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}_{\text{اضافه شد}}$$

یعنی برخلاف روش لاگرانژ با اضافه کردن یک نقطه محاسبات را دوباره تکرار نمی‌کنیم.

$$f(3) = ? \cong \frac{1}{4} + \frac{1}{40}(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{6}{20} = 0/3$$

خطای چندجمله‌ای درونیاب:

با استفاده از قضیه زیر خطای چندجمله‌ای درونیاب تابع $y=f(x)$ را تقریب می‌زنیم.

قضیه: فرض می‌کنیم f بر $[x_0, x_n]$ تعریف شده باشد و برای $x\in[x_0, x_n]$، $f^{(n+1)}(x)$ موجود باشد در این صورت:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_x)$$

که در آن $x_0 \le \eta_x \le x_n$

- در عمل موقعیت دقیق نقطه η_x معلوم نیست لذا برای $f^{(n+1)}(\eta_x)$ یک ...... در نظر می‌گیریم قرار می‌دهیم.

$$\underset{x_0\le x\le x_n}{Max}\{|f^{(n+1)}(x)|\} = M$$

بنابراین

$$\Longrightarrow |f(x) - P_n(x)| \le \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} M$$

درونیابی:

دستور درونیابی نیوتن برحسب تفاضل‌های پیشرو:

فرض می‌کنیم جدولی به صورت زیر داریم:

x_i	x_0	x_1		x_n
f_i	f_0	f_1		f_n

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$\vdots$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

فرض می‌کنیم نقاطمان که x_iها متساوی الفاصله هستند.

$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\forall x \left(x\in[x_0, x_n]\right);\ x \in x_0 + sh$$

$$\Rightarrow s = \frac{x-x_0}{h}$$

ضرایب چند جمله ای درونیاب

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_i & f_i & & & & \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^4 f_0 \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 & \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & & \\
 & & \Delta f_3 & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}
$$

حل چند جمله ای درونیاب به صورت زیر خواهد شد

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} s + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} s(s-1) + \frac{\Delta^3 f_0}{3!} s(s-1)(s-2) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i & f_i & & & \\
\hline
-2 & 3 & & & \\
 & & \Delta f_0 = -2 & & \\
-1 & 1 & & \Delta^2 f_0 = 2 & \\
 & & \Delta f_1 = 0 & & \Delta^3 f_0 = 0 \\
0 & 1 & & \Delta^2 f_1 = 2 & \\
 & & \Delta f_2 = 2 & & \\
1 & 3 & & &
\end{array}
$$

$$P_2(x) = 3 + \frac{-2}{1!} s + \frac{2}{2!} s(s-1) + 0 \times \dots$$

$$= 3 - 2s + s^2 - s = s^2 - 3s + 3$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x+2}{1} = x+2 \qquad P_2(x) = \dots\dots$$

دستور درونیابی نیوتن برحسب تفاضلات پسرو:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\dots$	f_n

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \nabla f_i = \Delta f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$

$$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

x_i	f_i				
x_0	f_0	∇f_1	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_3$	$\nabla^4 f_4$
x_1	f_1	∇f_2	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_4$	
x_2	f_2	∇f_3	$\nabla^2 f_4$		
x_3	f_3	∇f_4			
x_4	f_4				

ضرایب چندجمله‌ای درونیاب

$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\forall x \, (x \in [x_0, x_n]$$

$$x = x_n + sh$$

$$P_n(x) = f_n + \frac{\nabla f_n}{1!} s + \frac{\nabla^2 f_n}{2!} s(s+1) + \frac{\nabla^3 f_n}{3!} s(s+1)(s+2) + \dots$$

$$+ \frac{\nabla^n f_n}{n!} s(s+1) \dots (s+n-1)$$

x_i	f_i			
۲-	۳	۲-	۲	۰
۱-	۱	۰	۲	
۰	۱	۲		
۱	۳			

s یک عدد منفی خواهد شد

ادامه ← $s = \dfrac{x - x_n}{h}$

$$P_3(x) = 3 + \frac{2}{1!} s + \frac{2}{2!} s(s+1) + 0\,(0)$$

$$= 3 + 2s + s^2 + s = s^2 + 2s + 3$$

$$\nabla f_1 = \Delta f_0$$

برای تابع جدولی زیر جدول تفاضلات پیشرو را ساخته و با استفاده از آن چندجمله‌ای درونیاب آن را بیابید. به کمک آن $f(0/63)$ را تخمین بزنید؟

x_i	f_i				
۰/۶	۰/۵۶۴۶۴۲	۰/۰۷۹۵۷۶	۰/۰۰۶۴۳۸-	۰/۰۰۰۷۲۹-	۰/۰۰۰۰۶۹
۰/۷	۰/۶۴۴۲۱۸	۰/۰۷۳۱۳۸	۰/۰۰۷۱۶۷-	۰/۰۰۰۶۶۰-	
۰/۸	۰/۷۱۷۳۵۶	۰/۰۶۵۹۷۱	۰/۰۰۷۸۲۷-		
۰/۹	۰/۷۸۳۳۲۷	۰/۰۵۸۱۴۴			
۱	۰/۸۴۱۴۷۱				

$$P_4(x) = 0/564642 + \frac{0/079576}{1!} s - \frac{0/006438}{2!} s(s-1) -$$

$$\frac{0/000729}{3!} s(s-1)(s-2) + \frac{0/000069}{4!} s(s-1)(s-2)(s-3)$$

$$P_4(0/63) = ? \qquad x = 0/63 \Rightarrow \frac{x - x_0}{0/1} = s = 0/3$$

$$P_4(0/63) = 0/589145$$

تمرین: فرض کنید $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ با فرض نقاط $x_i = i$; $i = 0, 1, 2$ اولاً چندجمله‌ای درونیاب f را بیابید (نیوتن پیشرو) ثانیاً یک کران بالا برای عبارت خطای مطلق بیابید.

براساس خطای درونیاب چندجمله‌ای

روشی برای مینیمم کردن خطای چندجمله‌ای درونیاب:

اگر $P_n(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \dots$ باشد، آنگاه:

$$|f(x)-P_n(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} M_{n+1}$$

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq \eta \leq x_n} \left\{ |f^{(n+1)}(\eta)| \right\}$$

سوالی که مطرح است این است که

آیا می‌توان نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ را طوری انتخاب نمود که خطای چندجمله‌ای درونیاب مینیمم شود.
نشان می‌دهیم که اگر نقاط x_iها را ریشه‌های چندجمله‌ای ...... بگیریم عبارت خطا مینیمم خواهد شد
بنابراین باید چندجمله‌ای های ...... معرفی کنیم.

با توجه به اینکه چندجمله‌ای های ...... در بازه $[-1,1]$ تعریف می‌شوند باید بتوانیم هر بازه دلخواه $[a,b]$ را به بازه $[-1,1]$ تبدیل کنیم. نگاشت زیر بازه $[a,b]$ را به $[-1,1]$ تبدیل می‌کند

$$\psi : [a,b] \to [-1,1]$$

$$\forall x \left(x \in [a,b] : \psi(x) = \frac{2x-(b+a)}{b-a} \right) \Rightarrow \begin{cases} \psi(a) = -1 \\ \psi(b) = 1 \end{cases}$$

فرمول فوق زمانی مفید است که نقاط بازه متساوی الفاصله باشند یعنی $x_{i+1} - x_i = h$ باشد که در این صورت

$x_1 = x_0 + h$

$x_2 = x_0 + 2h$