جزوهٔ معادلات دیفرانسیل

(سیّدمحمد فخرموسوی)

سرفصل ها:

- **تعاریف**
- **انواع معادله دیفرانسیل مرتبه اول**

۱.معادلات جداشدنی

۲.معادلات همگن

۳.معادله کامل

۴.عامل انتگرال ساز

۵.معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

۶.معادله برنولی

- **مسیر های قائم**
- **معادلات خطی مرتبه دوم**

روش حل معادلاتی که فاقد xوyهستند

عملگر دیفرانسیلی(مرتبه nام خطی هست)

۱.همگن و غیر همگن

۲.روش کشی اویلر

۳.روش ضرایب نامعین

۴.روش تغییر پارامترها

۵.روش کاهش مرتبه

- **حل معادلات با استفاده از سری**

۱.سری توانی

۲.فروبینیوس

- **تبدیلات لاپلاس**

۱.تبدیل لاپلاس

۲. قضایای انتقال

۳. تبدیل لاپلاس مشتق

معادله دیفرانسیل معمولی

هر معادله شامل متغیر مستقل x و متغیر وابسته y و مشتقات y را یک معادله دیفرانسیل گویند.

$$y = x^2 + x + 1$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 3$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 7$$

.

.

.

مرتبه معادله دیفرانسیل:

مرتبهٔ بالاترین مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را مرتبهٔ معادله گویند.

درجه معادله دیفرانسیل:

توان بالاترین مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را درجه معادله گویند.

مثال:

$xy' \mp y = 2$ مرتبه۱

$\frac{dy^2}{dx^2} - 1 = y$ مرتبه۲

(پس باید مشتق y را نگاه کنیم)

قرارداد:

یک معادله مرتبه n ام را در حالت کلی به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

تعریف جواب:

تابع $y = g(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ جواب معادله دیفرانسیل گویند هرگاه:

الف) تعریف شده باشد   ب) در معادله صدق کند

تمرین: نشان دهید $\begin{matrix} y = tgx - x \\ x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \end{matrix}$ جواب $y' = (x+y)^2$ است.

جواب:

$$\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

طرف اول : $y = tgx - x \ \Rightarrow \ y' = 1 + tg^2x - 1 \Rightarrow \ y' = tg^2x$

طرف دوم : $(x+y)^2 = (x + tgx - x)^2 = tg^2x$

تمرین: ثابت کنید $y = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر است:

$$y' - 2xy = 1$$

یادآوری: قضیهٔ دوم حساب: $y = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad y' = v'f(v) - u'f(u)$

جواب:

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}.e^{-x^2} + 2xe^{x^2} - 2x.\left(e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}\right)$$
$$= 1$$

طرف اول :

تابع ضمنی: تابع $f(x,y)=0$ را ضمنی گویند هرگاه $y=\mathrm{g}(x)$ چنان یافت شود که:

$$f\big(x,\mathrm{g}(x)\big)=0$$

مثال: $x^2+y^2=1$ ضمنی است؟

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

ولی $x^2+y^2=0$ ضمنی نیست زیرا $y^2=-x^2$ (غیر ممکن)

توجه: از خود معادلهٔ دیفرانسیل انتگرال بگیریم جواب معادله دیفرانسیل می‌شود و هرگاه از جواب مشتق بگیریم می‌شود خود معادله دیفرانسیل.

جواب ضمنی: تابع ضمنی $f(x,y)=0$ جواب معادله دیفرانسیل است هرگاه معادله دیفرانسیل با مشتق‌گیری از روی آن بدست آید.

تمرین: نشان دهید $x^2+y^2-25=0$ جواب معادله $yy'+x=0$ است.

جواب: $\frac{d(x^2+y^2-25)}{dx}=0 \;\Rightarrow\; 2x+2yy'-0=0 \;\Rightarrow\; yy'+x=0$

خانواده n پارامتری از جواب:

یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبهٔ n ام را خانوادهٔ n پارامتری گویند هرگاه دارای n پارامتر $c_1,\dots,c_n$ باشد.

تمرین:نشان دهید $y=c_1e^x+c_2e^{-4x}$ یک خانوادهٔ دو پارامتری معادلهٔ دیفرانسیل

$-y'' - 3y' + 4y = 0$ است.

نشان می‌دهیم جواب است:

$$y' = c_1e^x - 4c_2e^{-4x}$$

$$y'' = c_1e^x + 16c_2e^{-4x}$$

$$-y'' - 3y' + 4y = -c_1e^x - 16c_2e^{-4x} - 3c_1e^x + 12c_2e^{-4x} + 4c_1e^x + 4c_2e^{-4x} = 0$$

جواب عمومی:

جوابی است که:

الف) یک خانوادهٔ n پارامتری معادلهٔ مرتبهٔ n ام باشد.

ب) همه جوابها از روی آن بدست آید (به ازای انتخاب پارامترها)

جواب خصوصی:

جوابی که از روی جواب عمومی به ازای مقدار مشخص پارامترها بدست آید.

شرایط اولیه:

شرایطی که در آن اگر $y = g(x)$ جواب معادله دیفرانسیل باشد، مقدار y،y'،y''،... در نقطه x_0 مشخص باشد.

جواب منفرد:

جوابی از معادله است که تحت هیچ شرایطی از روی جواب عمومی بدست نیاید.

مثال: معادلهٔ $y = xy' + (y')^2$ ، جواب عمومی $y = cx + c^2$ را در نظر بگیرید. در اینصورت $y = -\frac{x^2}{4}$ یک جواب منفرد است.

طریقهٔ پیدا کردن معادله دیفرانسیل از روی جواب عمومی آن:

اگر جواب عمومی، n پارامتری باشد معادله‌ای که پیدا می‌کنیم، باید مرتبهٔ n ام باشد

الف) به تعداد پارامترها مشتق می‌گیریم

ب) از بین روابط موجود پارامترها را حذف می‌کنیم

تمرین: با توجه به جواب عمومی زیر معادله دیفرانسیلی پیدا کنید که جواب آن باشد؟

$$y = Csinx + x$$

جواب:

$$c = \frac{y - x}{sinx}$$

$$y' = Ccosx + 1$$

$$\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y - x}{sinx}\right) cosx + 1 \quad \Rightarrow y' sinx - ycosx = -xcosx + sinx$$

$$y' - ycotgx = 1 - xcotgx$$

تمرین: معادله دیفرانسیلی بیابید که جواب عمومی آن به فرم $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ باشد.

جواب:

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} \qquad (1)$$

$$y' = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x} \qquad (2)$$

$$y'' = c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x} \qquad (3)$$

$$(1) + (2):\ y + y' = 3c_2e^{2x}$$

$$(2) + (3): y' + y'' = 6c_2e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y + y'}{y' + y''} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y' - y'' - 2y = 0$$

تمرین: معادله دیفرانسیلی بیابید که جواب عمومی آن به فرم زیر باشد:

$$(x-c)^2 + (y-c)^2 = 2c^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 2c^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 2c$$ مشتق ضمنی

$$\frac{(2x + 2yy')(x + y) - (1 - y')(x^2 + y^2)}{(x + y)^2} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$2x^2 + 2xy + 2yxy' + 2y^2y' - x^2 - y^2 - y'x^2 - y'y^2 = 0$$

$$y'(2yx + y^2x^2) + 3x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

تمرین: معادله دیفرانسیلی را بیابید که خانواده دو پارامتری از جواب های آن باشد.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$$

جواب:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$$

$$= (1+x) + y^2(1+x) = (1+x)(1+y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}^{-1}y = x + \frac{x^2}{2} + c$$

هدف: حل یک معادله دیفرانسیل در جهت محاسبه جواب عمومی یا خصوصی یا منفرد.

انواع معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$

معادلهٔ جداشدنی: هرگاه $y' = f(x,y)$ را بتوان به صورت $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ نوشت معادله را جداشدنی گویند.

روش حل: جواب از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

مثال: جواب عمومی معادلهٔ زیر را بدست آورید:

$$y' = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x . e^y \quad \Rightarrow \quad e^x dx = e^{-y}dy \quad \Rightarrow \quad e^x dx - e^{-y}dy = 0$$ جدا شدنی

$$\int e^x dx - \int e^{-y}dy = C \;\Rightarrow\; e^x + e^{-y} = C \;\Rightarrow\; \frac{1}{e^y} = C - e^x$$

$$e^y = \frac{1}{C - e^x} \quad \Rightarrow \quad y = \ln(\frac{1}{c - e^x})$$

تمرین:

حل کنید $2x(y+1)dx - ydy = 0$

جواب:

$$2xdx - \frac{y}{y+1}dy = 0\,, y \neq -1$$

$$\int 2xdx - \int \frac{y}{y+1} = C \;\Rightarrow\; x^2 - y + Ln(y+1) = C \quad , y \neq -1$$

اگر $y=-1$ باشد: $2x(-1+1)dx - yx = 0$. بنابراین $y=-1$ جواب منفرد است.

تمرین: $\boldsymbol{x\sqrt{1-y}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0}$

جواب:

جدا شدنی $\quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{\sqrt{1-y}}dy = 0 \quad ,x \neq \pm 1\,, y \neq 1$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-y}}dy = C \;\Rightarrow$$

$$-\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1-y} = C$$

$y=1$ در معادله صدق می‌کند؛ جواب منفرد است.

تمرین: معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad , y \neq 0$$

$xdx + ydy = 0$ جدا شدنی $\int xdx + \int ydy = C$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)=C \;\Rightarrow\; x^2+y^2=2C$$

یک دایره است زیرا $C\neq 0$ ؛ $y=0$ در معادله صدق نمی‌کند. پس جواب نیست.

تمرین: حل کنید:
$$x\cos y dx+\sqrt{x+1}\sin y dy=0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx+\frac{\sin y}{\cos y}dy=0 \qquad ,x\neq -1\,,y\neq\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{x+1}=t \;\Rightarrow\; x=t^2-1 \;\Rightarrow\; dx=2tdt$$

$$\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{t^2-1}{t}2tdt=2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}\right)=\frac{2(x-2)}{3}\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow\; \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}-Ln|\cos y|=C$$

امّا $y=\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ در معادله صدق می‌کند:

$$x\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)dx+\sqrt{x+1}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)dy=0$$

پس بی‌نهایت جواب منفرد به صورت $y=(2k+1)\frac{\pi}{2}\;,k\in\mathbb{Z}$ دارد.

تذکر: معادله دیفرانسیل $y'=f(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $ax+by=u$ به معادلهٔ جداشدنی تبدیل می‌شود.

تمرین: معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$y' = \cos(x+y) - 1$$

جواب:

$$x + y = u$$

$$1 + y' = u' \ \Rightarrow \ u' - 1 = y'$$

$$u' - 1 = \cos(u) - 1 \ \Rightarrow \ \frac{du}{dx} = cosu$$

$* \Rightarrow \ secdu = dx + c$ چون $\int 0 = C$ اضافه می‌کنیم :

(جزء مسئله نیست) $\rightarrow \ \int secxdx = \int secx \frac{(secx + tgx)}{secx + tgx} dx$

$$secx + tgx = t \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (secx \ tgx + sec^2 x)dx = dt \ \Rightarrow \ \int \frac{dt}{t} = Lnt$$

$$* \Rightarrow \ \int secudu = \int dx + C \ \Rightarrow \ Ln(secu + tgu) = x + C$$

$$\Rightarrow \ Ln\big(\sec(x+y) + tg(x+y)\big) = x + C$$

تمرین:

1) $y' = \frac{y}{x} Lnx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} Lnx \ \Rightarrow \ \frac{dy}{y} = \frac{Lnx}{x} dx$, $x \neq 0$ جدا شدنی

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{Lnx}{x} dx \ \Rightarrow \ Lny = \int t \ dt \ \Rightarrow \ lny = \frac{t^2}{2} + C$$

$$Lnx = t \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} = dt$$

2) $y' = \sqrt{(x^2 + x^{-1})^2 + 4}$

3) $y' = (cos^2 x)(cos^2 2y)$

- نشان دهید تغییر متغیر $u = ax + by$ معادلهٔ دیفرانسیل $y' = F(ax + by + c)$ را به معادلهٔ دیفرانسیل جداشدنی تبدیل می‌کند.

$u' = adx + bdy$

$$\Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{u' - adx}{b} \;\Rightarrow\; F(u + c)dx = \frac{u' - adx}{b} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{b\,F(u + c) + a} = dx$$

- با توجه به معادلهٔ قبل، $y' = (x + y)^2$ را حل کنید.

جواب:

$$x + y = u \;\Rightarrow\; u' = 1 + y' \;\Rightarrow\; u' - 1 = u^2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1 \;\Rightarrow\; dx = \frac{du}{1 + u^2} \xrightarrow{\text{جدا شدنی}} x + C = tg^{-1}u$$

$$\Rightarrow\; u = tg(x + C) \;\Rightarrow\; x + y = tg(x + C) \;\Rightarrow\; y = -x + tg(x + C)$$

تمرین: **بعد اینکه جداشدنی شد رو من نوشتم،گمون نکنم انتگرالو درست حل کرده باشم!از فرمول زیر استفاده کردم: $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}Arc\ tg\left(\frac{x}{a}\right)$؟!!!!!!!!!!!!!**

$y' = (y + 4x - 1)^2$

$y + 4x = u \;\Rightarrow\; u' = 4 + y'$

$u' - 4 = (u - 1)^2 \;\Rightarrow$

$$u' = u^2 - 2u + 5 \quad \Rightarrow \frac{du}{u^2 - 2u + 5} = dx$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - 2u + 1) + 4} = \int \frac{du}{(u-1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \tan^{-1}(\frac{\mathrm{u} - 1}{2}) = x$$

$$\frac{u-1}{2} = \tan 2x \quad \xrightarrow{u=y+4x} \quad y = 2\tan 2x - 4x + 1$$

تابع همگن:

تابع $f(x,y)$ را همگن با درجه $n \in \mathbb{R}$ گویند هرگاه به ازای هر $t > 0$ داشته باشیم:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

تمرین: همگن بودن توابع زیر را بررسی کنید:

الف) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y}}$

$$f(tx,ty) = \frac{\sqrt{t^2(x^2 + y^2)}}{t(x+y)} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x+y} = t^0 f(x,y)$$

پس همگن با درجهٔ $n = 0$ است.

ب) $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + y^3}$

$$f(tx,ty) = t^3x^3 + t^3y^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x,y)$$

پس همگن با درجهٔ $n = 3$ است.

پ) $\boldsymbol{f(x,y) = x + y + 1}$

$$f(tx,ty)=tx+ty+1=t(x+y)+1\neq t^n f(x,y)$$

همگن نیست.

معادلهٔ دیفرانسیل همگن:

معادلهٔ $y'=f(x,y)$ را همگن گویند هر گاه تابع $f(x,y)$ همگن با درجهٔ $n=0$ باشد.

تذکر: ثابت کنید معادلهٔ همگن با تغییر متغیر $y=vx$ به جداشدنی تبدیل می‌شود:

$$y'=v'x+v$$

$$y'=f(x,y) \quad\Rightarrow\quad v'x+v=f(x,vx) \quad\Rightarrow\quad v'x+v=t^0 f(1,v)$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}=f(1,v)-v \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{f(1,v)-v}=\frac{dx}{x}$$ جدا شدنی

تمرین: معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\boldsymbol{(x-y)dx+(x-4y)dy=0}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x-4y}=f(x,y)$$

$$f(tx,ty)=\frac{ty-tx}{tx-4ty}=t^0 f(x,y) \quad\Rightarrow\quad n=0 \quad\Rightarrow$$ پس معادله همگن است

تغییر متغیر: $y=vx$

$$v'x+v=\frac{vx-x}{x-4vx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}x = \frac{v-1}{1-4v} - v \quad ; \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-4v}{4v^2-1}dv = \frac{dx}{x} \quad ; \qquad v \neq \pm\frac{1}{2}$$ جدا شدنی

$$\frac{1-4v}{4v^2-1} = \frac{A}{2v-1} + \frac{B}{2v+1} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad , \quad B = -\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{1-4v}{4v^2-1}dv = \int \left[\frac{\frac{1}{2}}{1-2v} - \frac{\frac{3}{2}}{2v+1}\right]dv = -\frac{1}{4}Ln|1-2v| - \frac{3}{4}Ln|1+2v|$$

$$Ln|x| = -\frac{1}{4}Ln|1-2v| - \frac{3}{4}Ln|1+2v| + C$$

$$Ln|x|^4 + Ln|1-2v| + Ln|1+2v|^3 = 4C$$

$$\Rightarrow \quad |x|^4 \times |1-2v| \times |1+2v|^3 = e^{4C}$$

$$\xRightarrow{v=\frac{y}{x}} \quad |x|^4 \left|1-2\frac{y}{x}\right| \left|1+2\frac{y}{x}\right|^3 = k$$

$$\Rightarrow \quad |x-2y||x+2y|^3 = k$$

ولی برای $v = \pm\frac{1}{2}$ داریم $y = \pm\frac{1}{2}x$ که هر دو در معادله صدق می‌کند و جواب منفرد است.

تمرین- حل کنید:

$$\left(\sqrt{x^2-y^2}+y\right)dx + xdy = 0$$

حل) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x} = f(x,y)$

$f(x,y)$ همگن با $n=0$ است در اینصورت:

$$y = vx \quad و \quad x \neq 0$$

$$v'x + v = \frac{\sqrt{x^2 - v^2x^2} + vx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}.x = \frac{|x|\sqrt{1-v^2} + v - v}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}.x = \pm\sqrt{1-v^2} \qquad , \quad x \neq 0$$

$$\frac{dv}{\pm\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x} \qquad , \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \pm Arcsinv = Ln|x| + C$$

$\Rightarrow \quad \pm Arcsinv = Ln|x| + C$ جواب عمومی

حل معادله دیفرانسیل $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)}$

تذکر:

حالت۱: دو خط موازی باشند $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right)$:

در اینصورت با تغییر متغیر $a_1x + b_1y = u$ یا $a_2x + b_2y = u$ به جداشدنی تبدیل می‌شود.

حالت۲: دو خط در نقطهٔ (x_0, y_0) متقاطع باشند یعنی $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ در این صورت با تغییر متغیر:

$$\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$$

به معادلهٔ همگن تبدیل می‌شود.

تمرین- حل کنید: $y' = \frac{x+2y}{2x+4y+1}$

جواب: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{0}{1}$

تغییر متغیر: $ax + by = u$ یعنی $\begin{matrix} u = x + 2y \\ u' = 1 + 2y' \end{matrix}$

جایگذاری $\dfrac{u'-1}{2}=\dfrac{u}{2u+1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u}{2u+1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4u+1}{2(2u+1)} \quad \Rightarrow \dfrac{2u+1}{4u+1}du=dx$ جدا شدنی

انتگرال می‌گیریم $\displaystyle\int \frac{2u+1}{4u+1}du$

$4u+1=t \quad \Rightarrow \quad 4du=dt$

$$\int \frac{2\left(\frac{t-1}{4}\right)+1}{t}\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\frac{t+1}{2t}dt=\frac{1}{8}\int\left(1+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{8}(t+Lnt)$$

$$\xRightarrow{t=4u+1} \quad x=\frac{1}{8}(4u+1+\ln|4u+1|)$$

$$\xRightarrow{u=x+2y} \quad x=\frac{1}{8}(4x+8y+1+\ln|4x+8y+1|)$$

معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$(2x-y+1)dx+(x+y)dy=0$$

جواب:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-2x-1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-2}{1}\neq\dfrac{1}{1} \quad \Rightarrow$ دو خط متقاطع

محل تقاطع : $\begin{cases}-2x+y-1=0\\ x+y=0\end{cases} \quad , \quad x_0=-\dfrac{1}{3} \quad , \quad y_0=\dfrac{1}{3}$

$$\begin{cases}x=u-\frac{1}{3}\\ y=v+\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dx=du\\ dy=dv\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+y-1}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dv}=\frac{-2\left(u-\frac{1}{3}\right)+v+\frac{1}{3}-1}{u-\frac{1}{3}+v+\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = \frac{-2u + v}{u + v} \quad \Rightarrow$$ همگن با درجه $n = 0$ است

تغییر متغیر: $v = wu$:

$$v = wu \quad \Rightarrow \quad v' = w'u + w \quad \Rightarrow \quad w'u + w = \frac{-2u + wu}{u + wu}$$

$$\Rightarrow \quad w'u = \frac{w - 2}{1 + w} - w = -\frac{w^2 + 2}{1 + w} \quad \xRightarrow{w' = \frac{dw}{du}} \quad \frac{1 + w}{w^2 + 2} dw = -\frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} Ln(w^2 + 2)$$

$$w = \frac{v}{u} = \frac{y - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}} Arctg\left(\frac{y - \frac{1}{3}}{\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)}\right) + \frac{1}{2} Ln\left(2 + \frac{y - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}}\right)$$
$$= -Ln\left(x + \frac{1}{3}\right) + C$$

توجه:

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} Arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c}$$

تمرین:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \qquad\qquad Mdx + Ndy = 0 \qquad y = vx$$

$$x^2 y' - 3xy - 2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3y}{x} + \frac{2y^2}{x^2}$$

$$y = vx \qquad , \qquad y' = v + v'x$$

$$y' = v + v'x = 3v + 2v^2 \quad \Rightarrow \quad xv' = 2v + 2v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{2(v+v^2)}$$

$$\Rightarrow \quad Lnx + C = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v+v^2}$$

روش اول : $\dfrac{1}{v(1+v)} = \dfrac{A}{v} + \dfrac{B}{v+1} \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v+1} = \ln|v| - \ln|v+1|$

$$A(v+1) + Bv = 1$$

$$Av + Bv = 0$$

$$A = 1 \qquad B = -1$$

روش دوم : $\dfrac{1}{v(v+1)} = \dfrac{A}{v} + \dfrac{B}{v+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{v+1} = A + \dfrac{Bv}{v+1} \;\Rightarrow\; v = 0 \;\Rightarrow\; A = 1$

$$\frac{1}{v} = \frac{A(v+1)}{v} + B \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

❋ معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$y' = \frac{-x + y(Lny - Lnx)}{xLny - xLnx}$$

معادلهٔ همگن ، $y = vx$

$$v + v'x = \frac{-x}{xLn\frac{y}{x}} + \frac{yLn\frac{y}{x}}{xLn\frac{y}{x}} = \frac{-1}{Lnv} + v$$

$$\Rightarrow \quad xv' = -\frac{1}{Lnv} \quad \Rightarrow \quad -Lnvdv = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -(vLnv - v) = Lnx + Lnc$$

$$\Rightarrow \quad Lnxc = -v\,Lnv + v \;\Rightarrow\; \quad xc = e^{-v\ln v}\, e^{v}$$

$$\Rightarrow \quad xc = v^{-v}\, e^{v} \quad \Rightarrow \quad xc = \left(\frac{e}{v}\right)^{v} \quad \xRightarrow{v=\frac{y}{x}} \quad xc = \left(\frac{e}{y/x}\right)^{y/x}$$

معادلات همگن زیر را حل کنید:

$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}}$

$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{(x+y)dx - (x-y)dy = 0}$

$1) y' = \frac{y}{x} + 2e^{-\frac{y}{x}}$ $\qquad$ $y = vx$ معادله همگن

$$v + v'x = v + 2e^{-v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{2e^{-v}} \quad \Rightarrow$$

$$Lnx + Lnc = \frac{1}{2}\int e^{v} dv \quad \Rightarrow \quad Lnx + Lnc = \frac{1}{2v} e^{v} \quad \Rightarrow \quad \ln xc = \frac{e^{y/x}}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$2) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ $\qquad$ $y = vx$ معادله همگن

$$v + v'x = \frac{x(1+v)}{x(1-v)} \quad \Rightarrow \quad v'x = \frac{1+v}{1-v} - v \quad \Rightarrow \quad v'x = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$x\ \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1-v}{1+v^2}\, dv = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{1+v^2} - \int \frac{v}{1+v^2} dv = \ln x$$

$$tg^{-1}\, v - \frac{1}{2}\ln|1+v^2| = \ln x \quad \xRightarrow{v=\frac{y}{x}} \quad tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = \ln x$$

تمرین: با استفاده از تمرین قبل، تمرین زیر را حل کنید:

$$\boldsymbol{y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}}$$

حل: $u = x + y \quad \Rightarrow \quad u' = 1 + y'$

$$\Rightarrow \quad u' - 1 = \frac{u + 4}{u - 6} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{u - 6}{2u - 2} du \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\int \frac{u - 6}{u - 1} du$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\int \frac{u}{u - 1} du - \frac{1}{2}\int \frac{6}{u - 1} du \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}\int \frac{t + 1}{t} dt - 3\ln|u - 1|$$

$$t = u - 1$$

$$dt = du$$

$$\Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(\textstyle\int dt + \int \tfrac{dt}{t}) - 3\ln|u - 1| \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(t + \ln|t|) - 3\ln|u - 1|$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(u - 1) - \frac{5}{2}\ln|u - 1| \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(x + y - 1) - \frac{5}{2}\ln|x + y - 1|$$

تمرین:

$$\boldsymbol{y' = \frac{x + 2y}{1 - y}}$$

معادلهٔ کامل:

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را کامل گویند هرگاه تابع $F(x,y)$ با مشتقات جزئی پیوسته یافت گردد که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases}$$

محک کامل بودن:

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad \text{کامل است}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

قضیه: هرگاه F_{xy} و F_{yx} پیوسته باشد آنگاه: $f_{xy} = f_{yx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

تمرین: معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$ydx + (x + y^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ کامل است

تعریف : $\exists F \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + y^2 \end{cases}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int y\, dx \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F = yx + g(y)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \mathrm{g}'(y) \quad \Rightarrow \quad x + y^2 = x + \mathrm{g}'(y) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{g}'(y) = y^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = \mathrm{g}(y) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F = yx} + \frac{\mathrm{y}^3}{3} + c$$

تمرین- حل کنید:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{xe^y + 2y}}$$

حل: $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \qquad \Rightarrow$$ کامل است

$$\exists F\colon \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y + 2y \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y \quad \Rightarrow \quad F = xe^y + \mathrm{g}(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \mathrm{g}'(y)$$

$$\Rightarrow \quad xe^y + 2y = xe^y + \mathrm{g}'(y) \quad \Rightarrow \quad f'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{g}(y) = y^2$$

$$\Rightarrow \quad F = xe^y + y^2 + c$$

تمرین- نشان دهید هر معادله دیفرانسیل جداشدنی، کامل است:

$$\boldsymbol{f(x)dx + f(y)dy = 0}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x} = M\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}\\ \dfrac{\delta^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\delta N}{\partial x}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

حال $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\delta N}{\partial x}$

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dt$$

$$= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} dt = M(x,y_0) + M(x,y) - M(x,y_0) = M(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

تمرین:

$$\boldsymbol{(y + ycosxy)dx + (x + xcosxy)dy = 0}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + cosxy - xysinxy$$

$$F = \int (y + ycos\ xy\ dx)\ \ dx \qquad\qquad \int \cos mx = \frac{1}{m}\sin mx$$

$$F = xy + y.\frac{1}{y}\sin xy + \varphi(y)$$

$$F = xy + \sin xy + \varphi(y) \xRightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} x + x\cos xy + \varphi'(y) = N$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = k$$

$$F = xy + \sin xy + k \quad \Rightarrow \quad \mathrm{xy} + \sin xy = c$$

تمرین:

1) $\left(\frac{y}{x} + yx\right)dx + (Lnx - 2)dy = 0$

2) $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$

فاکتور انتگرال ساز:

اگر معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد، بعضی مواقع میتوان با ضرب تابعی مانند $\rho(x,y)$ در طرفین معادله،آن را به معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کرد.یعنی:

$\rho Mdx + \rho Ndy = 0$ کامل شود

- $\rho(x,y)$ را به صورت زیر میتوان یافت:

۱) اگر $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \mathrm{g}(x)$ یعنی تابعی فقط بر حسب x باشد آنگاه:

$$\rho(x) = e^{\int \mathrm{g}(x)dx}$$

عامل انتگرال‌ساز فقط بر حسب x خواهد بود.

۲) اگر $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y)$ آنگاه:

$$\rho(y) = e^{\int g(y)dy}$$

عامل انتگرال‌ساز فقط بر حسب y خواهد بود.

۳) هرگاه $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM} = g(x,y)$ آنگاه:

$$\rho(x,y) = e^{\int g(t)dt}$$

عامل انتگرال‌ساز بر حسب xy خواهد بود که در آن $t = xy$.

مثال: عامل انتگرال‌ساز فقط برحسب y برای معادلهٔ $(y^2+y)dx - xdy = 0$ بیابید و سپس آنرا حل کنید.

حل: $$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{(2y+1)+1}{-y^2-y} = \frac{2(y+1)}{-y(y+1)} = -\frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow \quad g(y) = -\frac{2}{y}$$

$$\rho(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

حل معادله(کامل است) :

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X} = 1+\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \quad F = \int \left(1+\frac{1}{y}\right)dx = x + \frac{x}{y} + g(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y) \quad \Rightarrow \quad -\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(y) = k$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{x}{y} + k \quad \Rightarrow \quad F = x + \frac{x}{y} + c$$

تمرین: عامل انتگرال‌ساز برای معادله زیر بیابید که به صورت $\rho(x, y) = x^m y^n$ باشد و سپس معادله زیر را حل کنید:

$$(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

جواب : $(-3xy + 2y^3)dx + (x^2 + xy^2)dy = 0$

با ضرب طرفین در ρ داریم:

$$(-3x^{m+1}y^{n+1} + 2y^{n+3}x^m)dx + (x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{n+2})dy = 0$$

طبق فرض داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$-3(n+1)x^{m+1}y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2} = (m+2)x^{m+1}y^n + (m+1)x^m y^{n+2}$$

برای آنکه تساوی برقرار باشد، باید ضریب عبارت های یکسان در طرفین را مساوی هم قرار دهیم:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -3(n+1) = m+2 \\ 2(n+3) = m+1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} m = 1 \\ n = -2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \rho(x, y) = \frac{x}{y^2}$$

حل معادله: با ضرب طرفین در $\rho = \frac{x}{y^2}$:

$$\left(-3\frac{x^2}{y} + 2xy\right)dx + \left(\frac{x^3}{y^2} + x^2\right)dy = 0$$ کامل است پس

$$\exists\, F(x, y): \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M = -3\dfrac{x^2}{y} + 2xy \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = \dfrac{x^3}{y^2} + x^2 \end{cases}$$

$$F=\int\left(-3\frac{x^2}{y}+2xy\right)dx=-\frac{x^3}{y}+x^2y+\mathrm{g}(y) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{x^3}{y^2}+x^2+\mathrm{g}'(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{y^2}+x^2=\frac{x^3}{y^2}+x^3+\mathrm{g}'(y)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{g}'(y)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{g}(y)=c \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad F=\frac{x^3}{y}+x^2y+c=0$$

تمرین: عامل انتگرال‌ساز معادله زیر را حل کنید:

$$1)\ xydx+(1+x^2)dy=0$$

$$f(y)=\frac{M_y-N_x}{-M}=\frac{x-2x}{-xy}=\frac{-x}{-xy}=\frac{1}{y}$$

$$\rho=e^{\int f(y)dy}=e^{\int\frac{dy}{y}}=e^{\ln y}=y$$

طرفین را در ρ ضرب میکنیم:

$$xy^2\,dx+(y+yx^2)\,dy=0$$ کامل شد

$$\frac{\partial F}{\partial x}=xy^2 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\partial F}{\partial x}\,dx=\int xy^2\,dx \quad \Rightarrow \quad F=\frac{x^2y^2}{2}+g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=yx^2+g'(y) \quad \Rightarrow \quad y+yx^2=yx^2+g'(y)$$

$$g'(y)=y \quad \Rightarrow \quad g(y)=\frac{y^2}{2}+c \quad \Rightarrow \quad F=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}+c$$

$$2)\ (y^3+xy^2+y)dx+(x^3+x^2y+x)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2+2xy+1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 1$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{3(y^2 - x^2)}{x^3y - xy^3} = \frac{3(y^2 - x^2)}{xy(x^2 - y^2)}$$

$$h(z) = -\frac{3}{xy} \qquad z = xy \quad \Rightarrow \quad h(z) = -\frac{3}{z}$$

$$\rho = e^{\int h(z)dz} = e^{\int -\frac{3}{z}dz} = e^{-3\ln z} = z^{-3} = \left(\frac{1}{xy}\right)^3$$

تمرین: برای معادلات زیر عامل انتگرال‌ساز مناسب بیابید:

1) $e^x(x+1)dx + (ye^x - x^3e)dy = 0$

2) $(xy + y^2)dx - x^2dy$

تمرین: $\boldsymbol{xdy = (y + x^2 + 9y^2)dx}$

حل : $xdy - ydx = (x^2 + 9y^2)dx \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(1 + 9\frac{y^2}{x^2}\right)dx$

$$d(z) = (1 + 9z^2)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{1 + 9z^2} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}tg^{-1}3z = x + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = x + c$$

تمرین- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$xdy = (x^5 + x^3y^2 + y)dx$$

حل : $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \dfrac{(x^5 + x^3y^2)}{x^2 + y^2}dx$

$$\int d(tg^{-1}\frac{y}{x}) = \int x^3 dx \quad \Rightarrow \quad tg^{-1}\frac{y}{x} = \frac{x^4}{4} + c$$

حل کنید:

$$\begin{cases} \boldsymbol{xdy - ydx = (1 + y^2)dy} \\ \boldsymbol{(y + x)dy = (y - x)dx} \end{cases}$$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ $\boldsymbol{n}$ ام خطی:

یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام را خطی گویند هرگاه یک چند جمله‌ای درجهٔ اول برحسب $y, y', \dots, y^n$ باشد. یعنی به صورت $a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$.

معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی:

بصورت $a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$ باشد که می‌توان آنرا به فرم $y' + P(x)y = q(x)$ نوشت.

تمرین: برای معادله به فرم $y' + P(x)y = q(x)$ عامل انتگرال‌سازی بیابید که فقط بر حسب x باشد.

حل:

$$\big(p(x)y - q(x)\big)dx + dy = 0$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x) \quad \Rightarrow \quad \rho(x) = e^{\int p(x)dx}$$

حل معادله: $y' + P(x)y = q(x)$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x).e^{\int p(x)dx} + c\right]}$$

اثبات: طرفین معادله را در عامل $y(x) = e^{\int p(x)dx}$ ضرب می‌کنیم:

$$y'e^{\int p(x)dx} + P(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{d\left[y.e^{\int p(x)dx}\right]}{dx} = q(x).e^{\int p(x)dx}$$

$$\overset{\text{انتگرال}}{\Longrightarrow} ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c \quad \Rightarrow \quad \text{حکم}$$

تمرین: معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$y' - 2xy = e^{x^2}$$

جواب : $\mathrm{p}(x) = -2x\,, q(x) = e^{x^2}$

$$\int p(x)dx = \int -2xdx = -x^2$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} = \int e^{x^2}.e^{-x^2}dx = \int 1.dx = x$$

فرمول : $y = e^{x^2}[x + c] \Rightarrow y = xe^{x^2} + ce^{x^2}$

تذکر: معادلاتی به صورت $f'(y)y' + f(y)p(x) = q(x)$ با تغییر متغیر $u = f(y)$ به معادلهٔ خطی مرتبه اول تبدیل می‌شوند.

تمرین: معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$xe^{y}y' - e^{y} = \frac{2}{x}$$

جواب : $xe^y y' - e^y = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad e^y y' - e^y . \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} \quad : \quad x \neq 0$

$e^y = u \quad \Rightarrow \quad e^y y' = u' \quad \Rightarrow \quad u' - u.\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}$ خطی مرتبه اول

$$p(x) = -\frac{1}{x} \qquad\qquad q(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$\int p(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x|$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)}dx = \int \frac{2}{x^2}\, e^{-\ln|x|}dx = \int \frac{2}{x^3}dx = \int 2x^{-3}dx = -\frac{1}{x^2}$$

$$u = e^{\ln|x|}\left[-\frac{1}{x^2} + c\right] \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{x} + cx \quad \Rightarrow \quad e^y = -\frac{1}{x} + cx$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln(-\frac{1}{x} + cx)$$

تمرین: جواب معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حساب کنید:

$$xy' + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$$

حل : $y' + 3\frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^3} \qquad\qquad \rho = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$

$$x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = \sin x \quad \Rightarrow \quad x^3dy + 3yx^2dx = \sin x\, dx$$

$$\int d(x^3y) = \int \sin x\, dx \quad \Rightarrow \quad x^3y = -\cos x + c \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{\cos x}{x^3} + \frac{c}{x^3}$$

تمرین– معادلات خطی زیر را حل کنید:

1) $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

$$2)\ y' + \frac{1}{x}y = 3\cos 2x$$

معادلهٔ برنولی:

معادله به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^n$ که $n \neq 0,1$ را برنولی گویند.

(جداشدنی $n = 1$ و $n = 0$ خطی)

روش حل: با تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ به معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی تبدیل می‌شود.

تمرین:

حل کنید $y' + xy = \frac{x}{y^3}$

حل: معادلهٔ برنولی با $n = -3$ است که باتغییر متغیر $u = y^{1-n} = y^4$ حل می شود:

تغییر متغیر : $u = y^4 \quad \Rightarrow \quad u' = 4y^3y'$

پس طرفین را در $4y^3$ ضرب میکنیم تا به u' برسیم:

$$4y'y^3 + 4xy^4 = 4x$$

$\Rightarrow u' + 4xu = 4x$ خطی مرتبه اول

حل معادله : $p(x) = 4x \qquad q(x) = 4x$

$$\int p(x)dx = 2x^2$$

$$\int qe^{\int pdx} = \int 4xe^{2x^2}dx \quad \Rightarrow \quad 4xdx = dt$$

$$\int e^t dt = e^{2x^2}$$

جواب : $u = e^{-2x^2}\left[e^{2x^2} + c\right] \quad \Rightarrow \quad u = 1 + \dfrac{c}{e^{2x^2}}$

$$y^4 = 1 + \frac{c}{e^{2x^2}}$$

تمرین- جواب معادلهٔ زیر را پیدا کنید:

$$x^2y' + 2xy = y^3$$

جواب:

$$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{y^3}{x^2} \quad \Rightarrow \quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad z = y^{1-3} = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3}y'$$

طرفین را در $-2y^{-3}$ ضرب می کنیم تا به z' برسیم:

$$-2y^{-3}y' - 4\frac{y^{-2}}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

$\Rightarrow \quad z' - \dfrac{4}{x}z = -\dfrac{2}{x^2}$ خطی مرتبه اول $\quad p(x) = -\dfrac{4}{x} \;,\; q(x) = -\dfrac{2}{x^2}$

$$\int p(x)dx = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4}$$

$$\int q(x).e^{\int p(x)dx} = \int -\frac{2}{x^2}\, x^{-4}\, dx = \int -2x^{-6}dx = \frac{2}{5}x^{-5}$$

$$z = x^4\left[\frac{2}{5x^5} + c\right] = \frac{2}{5x} + cx^4$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{5x} + cx^4$$

تمرین- معادلات زیر را حل کنید:

1) $xy' + y = y^2 \ln x$

2) $\dfrac{dx}{dy} + 2xy = e^{-y^2}$

3) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$

معادلهٔ ریکاتی :

معادله به صورت $y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2$ که $f_2(x) \neq 0$ باشد ، ریکاتی گفته می‌شود.

روش حل معادله:

اگر $y_1(x)$ به عنوان جواب خصوصی داده شده با تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ به معادلهٔ دیفرانسیل $u' + [f_1 + 2f_2y_1]u = f_2$ تبدیل می‌شود.

تمرین: معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$$

جواب:

$$u' + \left[\frac{2}{x} - \frac{2}{x}(-x^2)\right]u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad u' + \left[\frac{2}{x} + 2x\right]u = \frac{1}{x}$$

$$Q(x) = \frac{1}{x} \ \ , \ \ \rho = e^{\int \frac{2}{x} + 2x dx} = e^{2\ln x + x^2} = x^2. e^{x^2}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u} = y - y_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{y - y_1}$$

تمرین:

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \qquad , y_1 = x$$

خانواده پوش‌ها:

منحنی $y = \varphi(x)$ را پوش خانواده $y = f(x, c)$ گویند هرگاه در هر نقطه $y = \varphi(x)$ حداقل یک منحنی از خانواده فوق مماس شود.

قضیهٔ پوش:

$y = \varphi(x)$ پوش $y = f(x, c)$ می‌باشد $\Leftrightarrow$ تابع $c(x)$ یافت شود که :

$$(c'(x) \neq 0) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = f(x, c) \\ f_c\big(x, c(x)\big) \end{cases}$$

نتیجه: برای محاسبهٔ پوش خانواده $F(x, y, c) = 0$، در دستگاه زیر c را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

تمرین: مطلوبست پوش منحنی زیر $(x - c)^2 + y^2 = 1$

حل) $\begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = 1 & \Rightarrow y = \pm 1 \\ 2(x - c) = 0 & \Rightarrow x = c \end{cases}$

$$y = \pm 1$$

تمرین: مطلوبست پوش خانوادهٔ زیر $y = 2cx - c^2$

حل) $\begin{cases} y = 2cx - c^2 \\ 0 = 2x - 2c \end{cases} \Rightarrow \quad x = c \quad \Rightarrow \quad y = 2x^2 - x^2 = x^2$

$y = x^2$ پوش است.

معادلهٔ کلرو: هر معادله مرتبه اول به صورت $y = xy' + f(y')$ را معادله کلرو گوییم. خواص:

الف) خانوادهٔ یک پارامتری $y = xc + f(c)$ جواب آن است.

ب) پوش خانواده اخیر جواب خصوصی آن است.

تمرین: معادله زیر را حل کنید:

$$y = xy' + (y')^2$$

جواب: خانوادهٔ $y = xc + c^2$ جواب آن است

$$\begin{cases} y = cx + c^2 \\ 0 = x + 2c \end{cases} \Rightarrow \quad c = -\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

$y = -\frac{x^2}{4}$ نیز جواب آن است (خصوصی)

تمرین:

1) $(xy + x^2y^3)y' = 1$

2) $(x^2 + y^2 - y)dx - (x^2 + y^2 - x)dy = 0$ کامل

3) $xy' - y(\ln xy - 1) = 0$

جواب ۲ : $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\dfrac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dx+\dfrac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dy$

$d\left(tg^{-1}\dfrac{y}{x}\right)=-dx+dy \quad \Rightarrow \quad tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)=x+y+c$

$\dfrac{y}{x}=tg(-x+y+c)$

جواب ۱ : $(xy+x^2y^3)y'=1 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{1}{y'}=xy+x^2y^3$

$$\boxed{\begin{array}{c} y'+P(x)y=Q(x)y^n \\ \dfrac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)x^n \\ Z=x^{1-n}=x^{-1} \\ Z'=-\dfrac{x'}{x^2} \end{array}}$$

$\Rightarrow \ \dfrac{dx}{dy}=xy+x^2y^3$

$\Rightarrow \ \frac{dx}{dy}-xy=x^2y^3 \quad \Rightarrow \quad x'-xy=x^2y^3$ برنولی

طرفین را در $-\frac{1}{x^2}$ ضرب می کنیم :

$\Rightarrow -\frac{x'}{x^2}+\frac{y}{x}=-y^3 \quad \Rightarrow \quad z'+yz=-y^3$ خطی مرتبه اول

$z=e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y).e^{\int p(y)dy}+c\right]=e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\int -y^3e^{\frac{y^2}{2}}+c\right]$

جواب ۳ : $xy'-y(\ln xy-1)=0$

$xy=u$

$$xdy - y(\ln xy - 1)dx = 0 \qquad \begin{cases} yf(x,y)dx + x\mathrm{g}(x,y)dy = 0 \\ u = xy \end{cases}$$ حالت کلی

$$y' = \frac{y}{x}(\ln xy - 1)$$

تغییر متغیر: $u = xy \quad , \; u' = y + xy' \Rightarrow \quad y' = \frac{u' - y}{x}$

$$\frac{u' - y}{x} = \frac{y}{x}(\ln u - 1) = \frac{y}{x}\ln u - \frac{y}{x}$$

$$\frac{u'}{x} = \frac{y}{x}\ln u \xrightarrow{y=u/x} \frac{u'}{x} = \frac{u}{x^2}\ln u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{u}{x}\ln u$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln x + \ln c = \int \frac{du}{u\ln u}$$

تغییرمتغیر: $\ln u = t \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{u}$

$$\Rightarrow \ln xc = \int \frac{dt}{t} = \ln t \quad \xrightarrow{t=\ln u} \quad \ln xc = \ln(\ln u) \quad \Rightarrow \quad \ln u = e^{\ln xc} = xc$$

$$\Rightarrow u = e^{xc} \quad \xrightarrow{u=xy} \quad xy = e^{xc} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x}e^{cx}$$

چند رابطهٔ مهم:

$i)\ d(x^2 + y^2) = 2(xdx + ydy)$

$ii)\ d(xy) = xdy + ydx$

$$iii)\ d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2}$$

$$iv)\ d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$v)\ d\left(tg^{-1}\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

$$vi)\ d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}$$

قضیهٔ اویلر: اگر F یک تابع همگن از درجهٔ k باشد که بر حسب x و y است آنگاه:

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=kF$$

نکته: معادلهٔ دیفرانسیل $y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_1x+b_1y+c_1}$ را در نظر بگیرید.

الف) اگر $a_2b_1=a_1b_2$ باشد، به معادلهٔ جداشدنی تبدیل می‌شود با تغییر متغیر $u=ax+by$

ب) اگر $a_2b_1\neq a_1b_2$ ، آنگاه تغییر متغیر $\begin{cases}u=x+h\\ v=y+h\end{cases}$ معادله را به یک معادلهٔ همگن تبدیل می‌کند.

مسیر متعامد در مختصات قطبی :

هرگاه یک خانواده با معادله قطبی داده می شود کافیست در آن $r\frac{d\theta}{dr}$ را با $-\frac{dr}{rd\theta}$ تعویض نموده و از حل معادله دیفرانسیل مسیر متعامد یافته می شود

تمرین : مسیر متعامد خانواده زیر را بیابید

$$r=k\sec\theta$$

$$\begin{cases}k=r\cos\theta\\ \dfrac{dr}{d\theta}=k\sec\theta tg\theta\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{dr}{d\theta}=tg\theta$$

$$\Rightarrow r\frac{d\theta}{dr}=\cot g\theta$$

با جانشانی داریم :

$$-\frac{dr}{rd\theta}=\cot g\theta$$

$$-\frac{dr}{r}=\cot g\theta d\theta$$ جدا شدنی

$$\Rightarrow -\ln r=\ln(\sin\theta)+C_1\Rightarrow\frac{1}{r}=e^{c_1}.\sin\theta$$

$$\Rightarrow r=c\sec\theta$$

تمرین : مسیرهای متعامد بر $y=cx^5$ **را بیابید .**

$$y=cx^5\Rightarrow c=\frac{y}{x^5}$$

$$y^- =5x^4c\Rightarrow y^- =5x^4\left(\frac{y}{x^5}\right)=5\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{1}{y'}\Rightarrow-\frac{1}{y'}=\frac{5y}{x}\Rightarrow\frac{-dx}{dy}=\frac{5y}{x}\Rightarrow$$

$$-xdx=5ydy\Rightarrow-\frac{x^2}{2}=\frac{5y^2}{2}+c\Rightarrow 5y^2+x^2=2c$$

تمرین : مسیرهای متعامد بر $r=k\sec\theta$ **را بیابید** $r=k\sec\theta\Rightarrow k=\frac{r}{\sec\theta}$

$$\frac{dn}{d\theta}=l.\sec\theta.tg\theta=\frac{r}{\sec\theta}.tg\theta.\sec\theta=rtg\theta$$

$$r\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{tg\theta}\Rightarrow -\frac{dr}{rd\theta}=\frac{1}{tg\theta}\Rightarrow \frac{-dr}{r}=\frac{d\theta}{tg\theta}$$

$$\Rightarrow -\ln r=\ln\sin\theta+\ln c\Rightarrow -\ln r=\ln e\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}=c\sin\theta\Rightarrow r=\frac{1}{c\sin\theta}$$

تمرین : مسیرهای قائم بر معادلات زیر بیابید .

$1)\cos y=ae^{-x}$

$2)y^2=4(x-a)$

توابع مستقل خطی

توابع $f_1(x),\dots,f_n(x)$ را بر I مستقل خطی گویندهرگاه ترکیب خطی $c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_nf_n=0$ نتیجه دهد که $c_1=c_2=\dots=c_n=0$

و وابسته خطی گویند هرگاه ترکیب خطی اخیر نتیجه دهد حداقل یکی از c_i ها مخالف صفر باشد

تمرین : نشان دهید $\begin{cases} f_1(x) = x^3 \\ f_2(x) = x^2|x| \end{cases}$ مستقل خطی اند

داریم : $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$

$$\Rightarrow c_1 x^3 + c_2 x^2 |x| = 0 \qquad \forall x$$

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow (C_1 + C_2) x^3 = 0 \\ x < 0 \Rightarrow (C_1 - C_2) x^3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x \neq 0} \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

یادآوری : دستگاه n معادله و n مجهول همگن $Ax = 0$

الف – بی نهایت جواب دارد هرگاه $|A| = 0$

ب – فقط جواب بدیهی $x = 0$ دارد هرگاه $|A| \neq 0$

تعریف : اگر توابع $f_n, \ldots, f_1$ بر بازه I تعریف شده در حداقل $n - 1$ بار مشتق پذیر باشد آنگاه دترمینان

ماتریس $\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$ رارونسکین یارونسکی توابع فوق می نامیم

این رونسکین را با $w = (x,\ f_1, \ldots, f_n)$ نشان می دهیم

قضیه : اگر رونسکین $f_n, \ldots, f_1$ در هیچ نقطه I صفر نشود آنگاه توابع فوق مستقل خطی اند .

عکس این قضیه لزوما درست نیست یعنی اگر $W(y_1, y_2)$ برابر صفر شود ممکن است y_1, y_2 مستقل خطی یا وابسته خطی باشند .

مثال نقض
$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = x^2|x|$$

تمرین : ثابت کنید $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{r_3 x}$ بطوریکه $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ مستقل اند .

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & r_3 e^{r_3 x} \\ r_1^2 e^{r_1 x} & r_2^2 e^{r_2 x} & r_3^2 e^{r_3 x} \end{vmatrix} = e^{r_1 \times} e^{r_2 \times} e^{r_1 \times} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

$$e^{(r_1 + r_2 + r_3)} \times (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(r_3 - r_2) \neq 0 \Rightarrow w(x) \neq 0$$

روش حل معادلاتی که فاقد متغیر x یا y هستند

الف- اگر درمعادله دیفرانسیل y ظاهر نشده باشد آنگاه قرار می دهیم $y^{-} = p$

$$y^{-} = p \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

ب – اگر در معادله x ظاهر نشده باشد آنگاه قرار می دهیم $y' = p$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} = y''$$

تمرین : جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید $y'' = (y')^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = (y')^2$$

$$y' = p \qquad y'' = p' = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = dy \Rightarrow \ln p = y + c \Rightarrow p = e^{y+c}$$

$$\Rightarrow y' = p = c_1e^y \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = c_1e^y \Rightarrow \frac{dy}{c_1e^y} = dx$$

$$c_1e^{-y}dy = dx \Rightarrow -c_1e^{-y} = x + C_2$$

مثال : $yy'' + (y')^2 = 0$

$$y' = p \qquad y'' = p' = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = -p$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln y = -\ln p + \ln c_1 = \ln\frac{C_1}{p}$$

$$\Rightarrow y=\frac{C_1}{p}\Rightarrow p=\frac{C_1}{y}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y'=\frac{C_1}{y}$$

$$\Rightarrow ydy=c_1dx\Rightarrow \frac{y^2}{2}=c_1x+c_2\Rightarrow y=\sqrt{2c_1x+2c_2}$$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$x^2y''=2xy'+(y')^2$$

$$y'=p \qquad y''=p'$$

$$x^2p'=2xp+p^2\Rightarrow p'=\frac{2p}{x}+\frac{p^2}{x^2}$$

همگن $p'=v'x+v \Leftarrow p=vx$

$$v'x+v=2v+v^2\Rightarrow \frac{dv}{dx}x=v^2+v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2+v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \frac{dv}{v^2+v}=\frac{A}{(v+1)}+\frac{B}{v}\Rightarrow B=1, A-1\Rightarrow \ln|v|-\ln|v+1|=\ln|x|+\ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{v}{v+1}\right|=\ln|xc|\Rightarrow \frac{v}{v+1}=xc\Rightarrow v=\frac{p}{x}\Rightarrow \frac{p}{p+x}=xc\Rightarrow \frac{y'}{y'+x}=xc$$

تمرین

$$1)\, y''=1+(y')^2$$

$$y'y''-x=0 \quad y'(1)=1 \quad y(1)=2$$

$$3)\, 2xy''=(y')^2-1$$

$$4)y'' = y' + 2x$$

عملگرد : تابع L از مجموعه توابع به مجموعه توابع با خاصیت زیر یک عملگرد خطی گویند .

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha(f_1) + \beta L(f_2) \qquad \alpha, \beta \in R$$

عملگر مشتق : عملگر مشتق را با D نمایش داده و تعریف می کنیم .

$$D_f = \frac{df}{dx}$$

قرار داد $D^n p = \dfrac{d^n f}{dx^2}$

عملگر دیفرانسیلی

عملگر $L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)$ را عملگرر دیفرانسیلی گویند که $Q_i(x)$ یک تابع است که به عنوان ضریب عملگر

نتیجه : معادله مرتبه n ام خطی را با عملگر دیفرانسیلی نمایش دهید

داریم : معادله مرتبه n ام خطی بصورت زیر :

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \Rightarrow l(y) = f(x)$$

تذکر : معادله L(y) = 0 را همگن گویند و جواب عمومی آن را با y_n نمایش می دهند و معادله دیفرانسیل L(y) = f(x) را غیرهمگن گویند و یک جواب خصوصی آن را با y_p نمایش می دهد .

قضیه : اگر $y_1, \ldots, y_n$ جوابهای مستقل L(y) = 0 آنگاه جواب عمومی برابر است با

$$y_n = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

قضیه : هرگاه y_h جواب عمومی l (y) = 0 و y_p جواب خصوصی l(y) = f(x) باشد آنگاه $y = y_h + y_p$ جواب معادله l(y) = f(x) است

روش حل معادله مرتبه n ام خطی همگن با ضرایب ثابت

هدف حل معادله $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + ay = 0$ است که در آن $a_1 \in R$ (ثابت اند)

چند جمله ای کمکی (مفسر – مشخصه)

چند جمله ای درجه n بصورت $p(r)=a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_1 r + a_0$ را چند جمله ی معادله n ام خطی همگن با ضرایب ثابت گویند و معادله p (r) = 0 را معادله کمکی گویند .

قانون حل l(y) = 0 با ضرایب ثابت

ابتدا ریشه های معادله p (r) = 0 را می یابیم و حالتهای زیر را در نظر میگیریم

الف)اگر $r_1, \dots, r_n$ ریشه های حقیقی آن باشند آنگاه

$$y_1 = e^{r_1 x}$$
$$y_2 = e^{r_2 x}$$
.
.
.
$$y_n = e^{r_n x}$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

ب – اگر $r_1, \dots, r_m$ ریشه های حقیقی آن باشند و r_1 و k بار تکرار می شود .

آنگاه توابع

$$y_1 = e^{r_1 x}$$
$$y_2 = xe^{r_2 x}$$
.
.
.
$$y_k = x^{k-1} e^{r_k x}$$
$$y_{k+1} = e^{r_{k+1} x}$$
.
.
.
$$y_m = e^{r_m x}$$

جوابهای مستقل معادله اند و $y_h = c_1 y_1 + ... + c_m y_m$

تذکر : بجز r_1 اگر ریشه ای دیگر تکرار شود باید مثل r_1 جوابهای مستقل متناظر را نوشت

پ – اگر r_1 مختلط $r_3,...,r_n$ ریشه های حقیقی متمایز باشند آنگاه $r_2 = \bar{r_1}$ نیز مختلط است حال توابع

$$y_1 = e^{ax} \cos bx$$
$$y_2 = e^{ax} \sin bx$$
$$y_3 = e^{r_3 x}$$
.
.
.
$$y_n = e^{r_n x}$$

$y_h = c_1 y_1 + ... + c_n y_n$ جواب عمومی است که در آن $r_1 = a + ib$

ت – هرگاه r_1 ریشه مختلط با k بار تکرار باشد و $r_3,...,r_n$ ریشه های حقیقی متمایز آن باشد آنگاه $r_2 = r_1^{-}$ نیز k بار تکرار خواهد شد و جوابهای مستقل عبارتند از :

$$y_1 = e^{ax} \cos bx$$
$$y_2 = xe^{ax} \cos bx$$
$$y_3 = x^2 e^{ax} \cos bx$$

.

.

.

$$y_k = x^{k-1} e^{ax} \cos bx$$
$$y_{k+1} = e^{ax} \sin bx$$
$$y_{k+2} = xe^{ax} \sin bx$$

.

.

.

$$y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx$$
$$y_{2k+1} = e^{r_3 x}$$

.

.

.

$$y_n = e^{r_n x}$$

که در آن $r_1 = a + ib$

مثال : معادله زیر را حل کنید .

$$2y''-3y'+y=0$$

$$y(0)=1 \qquad y'(0)=0$$

معادله کمکی

$$f(r)=2r^2-3r+1=0$$

$$\Rightarrow r_1=1, r_2=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y_1=e^x \\ d_2=e^{\frac{1}{2}x} \end{cases} \Rightarrow y_n=c_1e^m+c_2e^{\frac{1}{2}x}$$

جواب عمومی

$$y'_n=c_1e^x+\frac{1}{2}c_2e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+\frac{1}{2}C_2=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=-1 \quad C_2=2$$

جواب خصوصی

$$y=-e^x+2e^{\frac{1}{2}x}$$

تمرین: حل کنید

$$y'' - y' + y = 0$$

$$p(r) = 0 \Rightarrow r^2 - r + 1 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$$y_2 = e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{4}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x \right)$$

تمرین : $\left(D^2 + 2D + 1\right) y = 0$

حل :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$p(r) = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$$

$$y_n = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x\right)$$

تمرین :

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$p(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

$$p(r) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \quad , \quad r_1 = -1$$

$$p(r) = (r+1)(r^2+1) = 0$$

$$r_1 = -1$$

$$r_2 = \pm i \Rightarrow \alpha \pm iB$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

تمرین : معادله دیفرانسیلی را بیابید که تابع زیر یک جواب آن باشد (از کمترین درجه ممکن)

$$y = xe^{-2x}$$

$$r_1 = r_2 = -2 \qquad (r_1+2)(r_1+2) = 0 \Rightarrow (r+2)^2 = 0$$

$$r^2 + \varepsilon r + \varepsilon = 0 \Rightarrow y'' + \varepsilon y' + \varepsilon y = 0$$

تمرین : جواب معادلات زیر را بیابید

$$y''' - 4y' = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(r^2 + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = x\cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3 = \sin x \\ y_4 = x\sin x \end{cases}$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4$$

نکته : هرگاه در یک معادله مفسر یا شاخص تمام توانها زوج بودند کمترین توان را برابر متغیر t می گیریم و سپس معادله را حل می کنیم

معادلات همبندکشی اویلر (هم بعد)

یک معادله خطی به صورت $a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1xy' + a_0y = 0$ را معادله کشی اویلر گویند که در آن $a_j \in R$

روش حل : یک معادله کشی اویلر با تغییر متغیر u = ln x حل می گردد .

نتیجه : با تغییر متغیر u = ln x کشی اویلر به معادله خطی با ضریب ثابت تبدیل می شود .

جواب : تغییر متغیر u = ln x $\leftarrow$ $x = e^u$

$$D(D-1)y(u) + 2Dy(u) - 6y(u) = 0$$

$$p(r) = r(r-1) + 2r - 6 = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = +2 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{-3u} + c_2 e^{2u}$$

$$u = \ln x \Rightarrow y = \frac{C_1}{x^3} + C_2 . x^2$$

$$y'(x) = -3\frac{C_1}{x^6} + 2C_2 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -3C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{3}{5}, C_1 = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{-2}{5 \times 3} + \frac{3}{5}x^2$$

تمرین : معادله زیر را حل کنید

$$(x-3)^2 y'' + 3(x-3)y' + y = 0$$

تذکر : معادلاتی که به صورت کشی اویلر بوده ولی به جای ضریب x^n دارای ضریب $(ax+b)^n$ باشد با تغییبر متغیر ax + b = u حل نمایید

$$x - 3 = u \Rightarrow u^2 y'' + 3uy' + y = 0$$

$$\ln u = t \qquad D(D-1)y(t)+3Dy(t)+y(t)=0$$

$$\Rightarrow r(r-1)+3r+1=0 \Rightarrow r^2+2r+1=0 \Rightarrow r=-1$$

$$\Rightarrow y(t)=cc_1+c_2te^{-t}$$

$$\Rightarrow t=\ln(x-3) \Rightarrow y(x)=\frac{(c_1+c_2\ln(x-3))}{x-3}$$

قضیه : هرگاه z_p, y_p جوابهای خصوصی معادله غیرهمگن (به ترتیب) $l_y = f$, $l_y = g$ باشند آنگاه $y_p + z_p$ جواب خصوصی معادله $l_y = f + g$است .

نکته : هرگاه در یک معادله مفسر یا شاخص تمام توانها زوج بود کمترین توان را برابر متغیر t می گیریم و پس معادله را حل می کنیم

معادله همبند کشی اویلر

$$b_2x^2y''+b_1xy'+b_0y=0$$

$$x=e^u \Rightarrow {}^*b_2y''+(b_1-b_2)y'+b_0y=0$$

Lnx = u

تمرین : معادله زیر را حل کنید

$$x^2y''+xy'+9y=0$$

$$p(r)=r^2+(1-1)y'+9=0 \Rightarrow r_2=-9, r=\pm 3i$$

$$y=c_1\cos 3u+c_2\sin 3u \Rightarrow y=c_1\cos(3\ln x)+c_2\sin(3\ln x)$$

$$(x+3)^2 y'' + 2(x+3)y' + y = 0 \qquad x+3 = e^u \qquad \ln(x+3) = u$$

تمرین : معادلات همبند کشی اویلر زیر را حل کنید

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0 \qquad y(1) = 1, y'(1) = 4$$

$$x^2 y'' - 5xy' + 5y = 0$$

روش ضرایب نامعین

روشی است برای حل معادله خطی غیرهمگن ضرائب ثابت در این روش اگر در معادله غیرهمگن l(y) = f(x) داشته باشیم $f(x) = x^m . e^{\alpha x}$

در حالتهای زیر می توان جواب خصوصی یعنی y_p را با ضرایب مجهول پیشنهاد داد و پس جواب عمومی معادله برابر با $y = y_h + y_p$

الف- اگر α ریشه معادله مفسر نباشد

$$y_p = \left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m\right) e^{\alpha x}$$

ب – اگر α ریشه تکراری مرتبه kام مفسر باشد

$$y_p = x^k \left(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m\right) e^{\alpha x}$$

R (x)	ریشه های معادله شاخص	جواب خصوصی y_p
e^{ax}	$a + r_2, a + r_1$	$y_p = Ae^{ax}$
e^{ax}	$a = r_2, a = r_1$	$y_p = Axe^{ax}$
h(x) یک چند جمله ای	$r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$	$y_p = (A_0 + A_1 x + \ldots)e^{ax}$

$y_p = x^s(A_0 + A_1x + ...)e^{ax}$ $\qquad r_1 = 0, r_2 = 0$ $\qquad$ h(x) یک چند جمله ای

نکته : اگر صفر ریشه معادله شاخص از مرتبه تکرار که باشد آنگاه $y_p = x^s(A_0 + A_1x + ...)$

$y_p = e^{\alpha x}(A_0 + A_1x + ...)$ $\qquad \pm iB\alpha$ ریشه معادله شاخص نبود $\qquad e^{ax}h(x)$

$y_p = e^{\alpha x}x^s(A_0 + A_1x + ...)$ $\qquad \alpha$ریشه معادله شاخص از تکرار بود $\qquad e^{ax}h(x)$

$y_p = A\cos\beta x + \beta\sin\beta x$ $\qquad \pm i\beta$ریشه ندارد $\qquad M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x$

$y_p = x^s(A\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$ $\qquad \pm i\beta$ ریشه از مرتبه تکرار $M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x$

$y_p = x^s e^{\alpha x}(A\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$ $\qquad \alpha \pm i\beta$ ریشه از مرتبه تکرار که بود

تمرین : جواب معادله دیفرانسیل را بیابید

$1) y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \Rightarrow e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha = -1$

$p(r) = r^2 - 3r - 4 = 0$

$(r-1)(r-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 4 \end{cases} \qquad r_1 = \alpha = -1$

$y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} + y_p$

$y_p = \alpha xe^{-x} \qquad -\frac{1}{5}xe^{-x}$

$y' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$

$y'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x}$

$$y_p^* - 3y_p' - 4y_p = e^{-x}$$

$$A = -\frac{1}{5}$$

تمرین : $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

$$p(r) = r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + y_p$$

$$y_p = Ax^2 e^{-2x} \qquad A = \frac{1}{2} \quad y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$$

$$y_p' = z \times Ae^{-2x} - 2Ax^2 e^{-2x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{-2x} - 4xAe^{-2x} - 4AxAe^{-2x} + 4x^2 Ae^{-2x}$$

$$\Rightarrow y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \Rightarrow 2Ae^{-2x} - 8axe^{-2x} + 4Ax^2 e^{-2x} + 8xAe^{-2x} + 8Axe^{-2x}$$

$$+ 4Ax^2 e^{-2x} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

تمرین :

$$1) y'' + 3y' = 4e^{-x} - 2e^{-2x}$$

$$2) y''' - 3y'' + 3y' = e^{x}$$

$$3) 2y'' - 4y' - 6y - 3e^{2x}$$

تمرین :

$$y'' + y = 2\cos x$$

$$p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y = e_1 \cos x + c_2 \sin x + y_p \qquad \alpha \pm i\beta$$

$$y_p = x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_p' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + bx\sin x$$

$$y_p'' = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x$$

$$A = 0 \qquad B = 1$$

$$y_p'' + y_p' = -2A\sin x + 2\beta\cos x = 2\cos x$$

$$\Rightarrow rB = 2, B = 1$$

$$\Rightarrow -2A = 0, A = 0$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$$

تمرین : $x^3 y'' + xy' = 9x^2 \ln x$

$$p(r) = r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

$$y = c_1 e^{-u} + c_2 e^{\ln x} + y_p$$

$$= -c_1 e^{\ln x} + c_2 e^{\ln x} + y_p = c_1 x^{-1} + c_2 x + y_p$$

$$x = e^u \Rightarrow \ln x = u$$

$$y'' = -y = 9e^{2u}.u \qquad h(x) = 9u$$

$$y_p = (A_0 + A_1 u)e^{2u}$$

$$y'_p = 2A_0 e^{2u} + A_1 e^{2u} + 2A_1 e^{2u}$$

$$y''_p - y_p = 3A_1 ue^{2u} + 3A_0 e^{2u} + 4A_1 e^{2u} = 9ue^{2u}$$

$$3A_1 = 9 \Rightarrow A_1 = 3$$

$$(3A_0 + 4A_1)e^{2u} \Rightarrow y_p = (-4 + 3\ln(x))x^2$$

$$y_p = (-4 + 3u)e^{2u} \Rightarrow y_p = (-4 + 3\ln x)x^2$$

$$y = c_1 e^{-\ln x} + c_2 e^{-\ln x} + y_p$$

تمرین :

$$1) y'' + y' + y = \sin^2 x = \frac{-\cos 2x}{2}$$

$$2) y'' - 3y' = 2e^{2x}\cos x$$

$$3) y'' + y = \sin x - \cos x$$

$$r^2 + r + 1 = 0 \qquad \Delta = -3 \qquad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$y_1 = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} + y_p$$

$$y'' + y' + y = \frac{1}{2} \qquad y_p = A_0\, x$$

$$y'' + y' + y = -\frac{1}{2}\cos 2x \qquad y_p = (A_1 \cos 2x + B_1 \sin 2x)$$

سوال :

$$y'' + 4y' - ye^{x} = yxe^{x}$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$y_n = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$y_p = A.e^{x}$$

$$\Rightarrow y'_p = A.e^{x} \qquad y''_p = A.e^{x}$$

در معادله غیرهمگن صدق می دهیم

$$A.e^{x} + 4A.e^{x} + 4A.e^{x} = ye^{x} \Rightarrow A_0 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$y_p = \frac{2}{2}x^2 \Rightarrow y = y_n + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{x}$$

تمرین : معادله $y'' + 4y' + 4y = 3x^{-2x}$

$$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$y_n = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

پیشنهاد : $\alpha = -2$ دو باریشه قسمت همگن است

$$y_p = x^2(A_0 + A_1 x)e^{-2x}$$

$$y_p = A_0 x^2 e^{-2x} + A_1 x^3 e^{-2x}$$

$$y'_p = 2A_0 xe^{-2x} - 2A_0 x^2 e^{-2x} + 3A_1 x^2 e^{-2x} - 2A_1 x^3 e^{-2x}$$

$$y_p'' = 2A.e^{-2x} - 4A_0xe^{-2x} - 4A_0xe^{-2x} + 4A_0x^2e^{-2x} + yA_1xe^{-2x}$$

$$- yA_1x^2e^{-2x} - yA_1x^2e^{-2x} + 4A_1x^3e^{-2x}$$

با جایگذاری دو معادله اصلی داریم

$$6A_1xe^{-2x} + 2A_0e^{-2x} = 3xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow yA_1x + 2A_0 = 3x \Rightarrow \begin{cases} 6A_1 = 3 \Rightarrow A_1 = \dfrac{1}{2} \\ 2A_0 = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \end{cases}$$

$$y = y_h + y_p \Rightarrow y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + x^2\left(0 + \frac{1}{2}x\right)e^{-2x}$$

تمرین : $$y'' + 3y' + 2y = \sin x$$

در چنین مواردی طبق فرمول اویلر داریم $$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

معادله $y'' + 3y' + 2y = e^{\ln x}$ را حل می کنیم در نتیجه قسمت موحدی y_p جواب خصوصیات (ضریب نما)

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, r = 2$$

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

$$y_p = A.e^{ix}$$

$$y_p' = iA_0e^{ix} \Rightarrow y_p'' = -A_0e^{ix}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix} \Rightarrow -A_0e^{ix} - 3A_0e^{ix} + 2A_0e^{ix} = e^{ix}$$

$$\Rightarrow -A_0 - 3iA_0 + 2A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i}$$

$$A_0 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} l$$

$$y_p = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} i\right)(\cos x + i \sin x)$$

$$y_p = \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x \Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x$$

تذکر : روش ضرایب نامعین در دو حالت قابل استفاده می باشد .

۱) قسمت همگن یک معادله خطی حتما با ضرایب ثابت باشد

۲) طرف راست معادله حتما به صورت $x^m e^{\alpha x}$ باشد

روش تغییر پارامترها

هرگاه معادله ناهمگن طوری باشد که طرف راست آن هر تابعی قرارگیرد ولی جواب قسمت همگن را بدانیم که $y_1, y_2, \ldots, y_n$ شرط است آنگاه پیشنهاد به صورت $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \ldots + c_n(x) y_n$ خواهد بود که توابع $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ از دستگاه زیر حساب می شود .

$$\begin{cases} c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots + c_n y_n' = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

مشتق

که در آن $a_n(x)$ ضریب $y^{(n)}$ در معادله f(x) تابع سمت راست است .

مثال :

$$y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$$

حل :

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1,2$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{2x}$$

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{2x} = 0 \\ c_1' e^x + 2c_2' e^{2x} = \dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{1} \end{cases}$$

یادآوری : روش کرامر

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

حال حل در دستگاه کرامر :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \sin e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}=\frac{-e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{3x}}=-e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & \sin e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}=\frac{e^{2x}\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{3x}}=e^{-2x}\sin\left(e^{-x}\right)$$

$$c_1'(x)=-e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)\Rightarrow c_1(x)=-\int e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)dx$$

داریم :

$$c_2'(x)=e^{2x}\sin^{-x}$$

$$c_2(x)=\int e^{-x}\sin\left(e^{-x}\right)dx=e^{-x}=t\Rightarrow -e^{-x}dx=dt$$

$$c_2(x)=-\int te\sin td$$

$$\begin{cases} \int x\cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax \\ \int x\sin ax dx = -\frac{1}{a}x\cos ax + \frac{1}{a^4}\sin ax \end{cases}$$

$$c_2 = t\cos t - \sin t = e^{-x}\cos\left(e^{-x}\right) - \sin\left(e^{-x}\right)$$

$$y_p = -\cos\left(e^{-x}\right)e^{x} + \left(e^{-x}\cos e^{-x}\right) - \sin\left(e^{-x}\right)e^{2x}$$

$$y = y_h + y_p$$

تمرین : $x^2y'' + xy' - y = x^2e^{-x}$

کشی اویلر : ln x = u

$$D(D-1)y(u) + Dy(u) - y(u) = e^{2u}e^{-e^{u}}$$

حل همگن $\quad r(r-1) + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

$$y_h = c_1e^{u} + c_2e^{-u}$$

$$y_p = c_1(u)e^{u} + c_2(u)e^{-u}$$

$$\begin{cases} c_1'e^{u} + c_2'e^{-u} = 0 \\ c_1'e^{u} - c_2'e^{-u} = \dfrac{e^{2u}.e^{-e^{u}}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(u) = \dfrac{1}{2}e^{u}.e^{-e^{u}} \\ c_2'(u) = -\dfrac{1}{2}e^{2u}.e^{-e^{u}} \end{cases}$$

$$c_1(u) = \frac{1}{2}\int e^{u}.e^{-e^{u}}du = -\frac{1}{2}e^{-e^{u}}$$

$$c_2(u) = -\frac{1}{2}\int e^{3u}.e^{-e^{u}}du = -\frac{1}{2}\int t^2e^{-t}dt$$

$$c_2(u)=\frac{1}{2}\left[-t^2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}\right]\Rightarrow c_2(u)=\frac{1}{2}t^2e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}$$

$$y=y_h+y_p$$

$$y(u)=c_1e^u+c_2e^{-u}-\frac{1}{2}e^{-e^u}-e^u+\left[\frac{1}{2}e^{2u}.e^{-e^u}+e^u.e^{-e^u}+e^{-e^u}\right]$$

$$\ln x=u \qquad y(x)=c_1x+\frac{c_2}{x}-\frac{1}{2}e^{-x}-x+\left[\frac{1}{2}e^2.e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}\right]\frac{1}{x}$$

روش کاهش مرتبه

برای حل معادله مرتبه دوم $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$ اگر y_1 جواب آن باشد آنگاه $y_2=c(x)y_1$ جواب دیگر آن خواهد بود که با y_1 مستقل بوده لذا $y=c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی آن است .

$$y_2=y_1\int\frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

در حالت های زیر می توان y_1 را نیز تعیین کرد

۱) اگر p(x) + Xq(x) = 0 آنگاه $y_1=x$

۲) اگر $1+p(x)+Q(x)=0$ آنگاه $y_1=e^x$

۳) اگر p(x) + q(x) = 0 آنگاه $y_1=e^{-x}$

تمرین : معادله $y''+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)y'-y=0$ را در نظر بگیرید اگر $y_1=x^2$ جواب آن باشد .

جواب عمومی را بیابید ؟

$$y_2 = c(x) y_1$$

$$c(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^4} e^{-\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx} dx = \int \frac{1}{x^4} e^{\left(\frac{x^3}{3}-\ln x\right)} xd$$

مثال) با توجه به اینکه $y = x$ ، یک جواب معادله دیفرانسیل $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ است، جواب معادلهٔ دیفرانسیل را بیابید:

جواب : $y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx$

$$y_1 = x \quad , \quad p(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$y = c_1 x + c_2 x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2x}{x^2-1} dx} dx = c_1 x + c_2 x \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln(x^2-1)} dx$$
$$= c_1 x + c_2 x \int \frac{1}{x^2(x^2-1)} dx = c_1 x + c_2 x \int \frac{x^2-(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} dx$$
$$= c_1 x + c_2 x \int \left[\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2}\right] dx = c_1 x + c_2 x \left[\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x}\right]$$
$$= c_1 x + c_2 x \left[\frac{x}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1\right]$$

سری توانی:

سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ را توانی گویند.

شعاع سری:

عدد $R \geq 0$ را شعاع سری توانی گویند هرگاه این سری به ازای x هایی که $|x-\alpha| < R$ همگرا و به ازای $|x-\alpha| > R$ واگرا باشد.

برای $|x-\alpha| = R$ باید بررسی شود.

بازه همگرایی: مجموعه نقاطی که سری در آنها همگراست.

فرمول شعاع:

الف) روش کشی: $\boldsymbol{R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}}$

ب) روش نسبت: $\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$

تمرین: بازهٔ همگرایی سری‌های زیر را بیابید:

الف) $$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+2} x^n}$$

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{\frac{n-1}{n+2}}{\frac{n}{n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n-1)(n+3)}{n(n+2)}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

بازهٔ همگرایی : $|X-\alpha| < R$

$$\Rightarrow \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1$$

واگراست :
$$\Rightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{n-1}{n+2}$$

همگرا نیست :
$$\Rightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum \frac{n-1}{n+2}(-1)^n$$

تمرین: بازهٔ همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ **را بدست آورید.**

در حالت کلی همگراست هرگاه طبق آزمون نسبت:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim \left|\frac{\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}}\right| = \left|\frac{x^2}{2n(2n-1)}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2n(2n-1)}\right| |x^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x^2| < \infty \quad \Rightarrow \quad x \in R$$

خاصیت:

۱) از سری توانی در بازهٔ همگرایی تا هر مرتبه‌ای می‌توان مشتق گرفت بدون آنکه بازه همگرایی تغییر کند؛

۲) برای انتگرال مشابه ۱ است؛

۳) در سری توانی در بازهٔ همگرایی را می‌توان جمع و ضرب نمود یعنی اگر برای $|x-\alpha| < R$ داشته باشیم:

$$\sum a_n(x-\alpha)^n = f(x)$$
$$\sum b_n\,(x-\alpha)^n = \mathrm{g}(x)$$

آنگاه:

$$\sum (a_n + b_n)(x-\alpha)^n = f(x) + \mathrm{g}(x)$$

$$\sum c_n (x-\alpha)^n = \sum a_n (x-\alpha)^n \times \sum b_n (x-\alpha)^n = f(x).\mathrm{g}(x)$$

که در آن : $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n \quad \Rightarrow \quad c_0 = a_0 b_0$

۴) **سری تیلور:** هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n = f(x)$ که بازه $|x-\alpha| < R$ باشد آنگاه:

$$a_0 = f(\alpha)$$
$$a_1 = f'(\alpha)$$
$$a_2 = \frac{f''(\alpha)}{2!} \qquad F(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$
$$\vdots \qquad |x| < R$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

نتایج:

الف) $x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

ب) $x \in \mathbb{R} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

پ) $x \in \mathbb{R} \quad \sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

ت) $|x| < 1 \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

ث) سری دو جمله برای $n \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|x| < 1 \quad : \quad (1+x)^n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n(n-1) - (n-m+1)}{m!} x^n$$

تمرین– بسط مک‌لورن توابع زیر را بنویسید:

الف) $y = \arctan u$ ؛

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

$$x \to -x^2 \to \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ب) $f(x) = (1-x)^{-2}$؛

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

داریم : $\frac{1}{1-x} = \sum x^n$

$$\xRightarrow{\text{مشتق}} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

پ) $y = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum x^n$$

$$\ln(1+x) = \int \sum (-1)^n x^n dx = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad |x| < 1$$

تذکر: سری $\sum a_n (x-a)^n$ با تغییر متغیر $x - \alpha = t$ به صورت $\sum a_n t^n$ می‌شود.

نقطهٔ تحلیلی: تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x_0$ تحلیلی گویند هرگاه عددی مانند R یافت شود بطوریکه بتوان بسط تیلور $f(x)$ را در بازهٔ $(x_0 - R, x_0 + R)$ نوشت و به عبارت دیگر f در x_0 و در یک همسایگی آن مشتق‌پذیر باشد.

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $x = 0$ تحلیلی نیست.

نقطهٔ معمولی و نقطهٔ منفرد:

نقطهٔ x_0 را یک نقطه معمولی معادله دیفرانسیل خطی

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

گویند هرگاه تمام توابع $f(x)$ ، $a_{n-1}, \dots, a_0(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. در غیر اینصورت x_0 نقطه منفرد معادله است.

قضیه: هرگاه x_0 نقطه معمولی معادلهٔ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

باشد سری $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n$ جواب آن است.

تمرین: جواب معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - (x+1)y' + x^2y = x$ ، $y'(0) = 1$ و $y(0) = 1$ را به کمک سری‌ها بیابید.

جواب: چون توابع :

$$Q_1(x) = -(x+1)$$
$$Q_0 = x^2$$
$$f(x) = x$$

در نقطهٔ $x = 0$ تحلیلی هستند،

پس $x = 0$ یک نقطع معمولی معادله است. پس جواب آنرا به صورت سری مک‌لورن پیشنهاد می‌دهیم:

پیشنهادی $y = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$

که $y(x) = f(x)$:

$$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 1$$

در معادله : $y''(0) + (0-1)y'(0) + 0.xy(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 1$

مشتق معادله:

$$y'' - y' - (x+1)y'' + 2xy + x^2y' = 1$$

$$y'''(0) - y'(0) - y''(0) + 0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = 3$$

به طور مشابه $y^{(4)}(0) = 3$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{3}{4!}x^4 + \cdots$$

تذکر: به این روش، روش مشتقات متوالی هم گویند.

تمرین: نقاط منفرد معادله زیر را بیابید:

$$x^3(x^2-1)y'' - x(x+1)y' - (x-1)y = 0$$

جواب) $y'' - \frac{1}{x^2(x-1)}y' - \frac{1}{x^3(x+1)}y = 0$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{x^2(x-1)} \qquad , \quad a_0 = -\frac{1}{x^3(x+1)}$$

در $x = 0$ و $x_1 = 1$ و $x = -1$ نا تحلیلی‌اند. پس این نقاط منفردند.

تمرین- جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل زیر را با روش سریها بدست آورید:

$$y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$$

جواب) چون ضرائب در $x = 0$ تحلیلی‌اند:

پیشنهادی $y=\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}$$

جایگذاری : $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}+(x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n=0$

بزرگترین توان شروع x^2 است همه را به آن تبدیل می‌کنیم :

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+2}+2\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n=0$$

بزرگترین اندیس شروع $n=6$ ؛ با لغزش حدود همه را به آن تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2A_2+6A_3x^1+\sum_{n=6}^{\infty} n(n-1)A_n\, x^{n-2}+A_1x+\sum_{n=2}^{\infty} nA_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+2}$$
$$+2A_0+2A_1x+\sum_{n=2}^{\infty} A_n x^n$$

$$\Rightarrow 2A_2+6A_3x$$
$$=\sum_{n=6}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}+A_1x+\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)A_{n-2}x^{n-2}$$
$$+\sum_{n=6}^{\infty} A_{n-6}x^{n-2}+2A_0+2A_1x+\sum_{n=6}^{\infty} A_{n-2}x^{n-2}=0$$

$$(2A_2+2A_0)+(6A_3+3A_1)x=\sum_{n=6}^{\infty}[n(n-1)A_n+nA_{n-2}+A_{n-4}]x^{n-2}=0$$

$$\begin{cases} 2A_2 + 2A_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -A_0 \\ 6A_3 + 3A_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_3 = -\dfrac{1}{2}A_1 \\ n(n-1)A_n + nA_{n-2} + A_{n-4} = 0 \end{cases}$$ رابطهٔ بازگشتی

$$n = 6 \quad \Rightarrow \quad 12A_6 + 4A_2 + A_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_6 = \frac{1}{6}A_0$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad 20A_5 + 5A_3 + A_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_5 = \frac{3}{40}A_1$$

$$y(x) = A_0 + A_1x - A_0x^2 - \frac{1}{2}A_1x^3 + \frac{1}{4}A_0x^4 + \frac{3}{40}A_1x^5 + \cdots$$

یا $y(x) = A_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) + A_1(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}A^5 + \cdots)$

تمرین: بسط تیلور جواب معادله دیفرانسیل $y'' + (x-1)y' = e^x$ را در نقطه $x = 1$ بنویسید. (یا به صورت یک سری توانی حول $x = 1$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-1)^n$$

جهت راحتی کار با تغییر متغیر $x - 1 = t$ کار را ادامه می‌دهیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} \times 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad y''(t) + ty'(t) = e^{t+1}$$

پیشنهادی $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n = e^t$$ جایگذاری

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$2A_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n = e + e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$2A_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)A_{n-2} t^{n-2} = e + e\sum_{n=3} \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2}$$

$$(2A_2 - e) + \sum_{n=3} [n(n-1)A_n + (n-2)A_{n-2} - \frac{e}{(n-2)!}] t^{n-2} = 0$$

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{e}{2} \\ n(n-1)A_n + (n-2)A_{n-2} - \dfrac{e}{(n-2)!} = 0 \end{cases}$$

$$n = 3 \quad \Longrightarrow \quad A_3 + A_1 - e = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_3 = -\frac{1}{6}A_1 + \frac{e}{6}$$

$$\overset{n=4}{\Longrightarrow} \;\; 12A_4 + \frac{2A_2}{\frac{e}{2}} - \frac{e}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_6 = -\frac{e}{24}$$

$$n = 5 \quad \Longrightarrow \quad 20A_5 + 3A_3 - \frac{e}{6} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_5$$

نقطهٔ منفرد منظم:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

نقطهٔ منفرد x_0 را منظم گویند هرگاه معادلهٔ اخیر به صورت

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)p(x) + q(x)y = 0$$

بنویسیم و $p(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند ، در غیر اینصورت نامنظم است.

تمرین– نقاط منفرد منظم معادله زیر را بیابید:

$$(x-1)y''+\frac{1}{x}y'-2y=0$$

جواب) $y''+\frac{1}{x(x-1)}y'-\frac{2}{x-1}y=0$

$\Longrightarrow \qquad x=1\,,x=0$ نقاط نامنفرد

با ضرب کردن معادله دوم در $(x-0)^2$ داریم:

$$x^2y''+\frac{x}{x-1}y'-\frac{2x^2}{x-1}y=0$$

$$p(x)=\frac{x}{x-1} \qquad\qquad q(x)=\frac{-2x^2}{x-1}$$

p و q در $x=0$ تحلیلی‌اند پس $x=0$ نقطهٔ منفرد و منظم معادله است.

حال برای $x=1$ با ضرب طرفین در $(x-1)^2$ داریم:

$$(x-1)^2y''+\frac{(x-1)}{x}y'-2(x-1)y=0$$

$$p(x)=\frac{1}{x} \qquad\qquad q(x)=-2(x-1)$$

که هر دو در $x=1$ تحلیلی‌اند پس $x=1$ منفرد منظم است.

روش فروبینوس:

هرگاه x_0 یک نقطهٔ منفرد منظم معادلهٔ $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$ باشد، جواب را به صورت سری فروبینوس یعنی به صورت:

$$y(x) = (x - x_0)^S \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n$$

با $A_0 \neq 0$ پیشنهخاد می‌دهیم. (S یک عدد)

معادلهٔ شاخصی:

هرگاه $x = 0$ نقطه منفرد منظم معادلهٔ $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ باشد، بعد از پیشنهاد جواب به صورت $y = x^S \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_n)^n$ صدق دادن آن معادله ضریب X^S مساوی صفر را معادلهٔ شاخصی گویند که برابر است با:

$$s(s-1) + sp(0) + q(0) = 0 \text{ معادلهٔ شاخصی}$$

نتایج:

اگر S_1 و S_2 ریشه‌های معادلهٔ شاخص باشند سه حالت اتفاق می‌افتد:

حالت۱)

$s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$ آنگاه:

$$y_1 = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$y_2 = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

دو جواب مستقل معدله‌اند و جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حالت ۲)

$s_1 = s_2 = s$آنگاه:

$$y_1 = x^s \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$y_2 = y_1 \ln x + x^s \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

دو جواب مستقل‌اند و جواب عمومی:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حالت ۳) اگر $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N}$ آنگاه:

$$y_1 = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

$$y_1 = k y_1 \ln x + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

دو جواب مستقل‌اند و $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی آن است.

تمرین: معادلهٔ زیر را با روش سریها حل کنید:

$$2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$$

جواب: بررسی $x = 0$

$$y'' + \frac{1+x}{2x} y' - \frac{1}{x} y = 0$$

پس $x = 0$ نقطهٔ منفرد است.

با ضرب طرفین در x^2 داریم:

$$x^2 y'' + \frac{x(1+x)}{2} y' - xy = 0$$

$$p(x) = \frac{1+x}{2} \qquad q(x) = -x$$

که در $x = 0$ تحلیلی‌اند پس $x = 0$ نقطهٔ منفرد منظم است.

پیشنهاد $y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$

$$s(s-1) + sp(0) + q(0) = 0$$

$$s(s-1) + \frac{1}{2}s + 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad s^2 - \frac{s}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad s_1 = 0 \ , s_2 = \frac{1}{2}$$

$$s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y_1 = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\ y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \end{cases}$$

که با جایگذاری در معادله می‌توان A_0 ها را پیدا نمود:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

تمرین: جواب معادله زیر را به صورت یک سری بنویسید:

$$ly = x^2 y'' + 3xy' + (1-2x)y$$

جواب) $x = 0$ نقطه منفرد منظم است $q(x) = (1-2x) \qquad p(x) = 3$

معادله مشخصه : $\quad s(s-1) + sp(0) + q(0) = 0$

$$\Longrightarrow \quad s(s-1) + 3s + 1 = s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad s_1 = s_2 = -1 = s$$

$$\begin{cases} y_1 = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \end{cases}$$

تمرین: به کمک سری‌ها حل کنید:

$$ly = xy'' - (4+x)y' + 2y = 0$$

جواب: $x = 0$ نقطه منفرد منظم است و داریم

$$x^2y'' - (4+x)xy' + 2xy = 0$$

$$p(x) = -(4+x) \qquad q(x) = 2x$$

معادلهٔ مشخصه (شاخص):

$$s(s-1) + s(-4) + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow s^2 - 5s = 0 \Longrightarrow s_1 = 5 \quad , \quad s_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^5\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\ y_2 = ky_1 \ln x + x\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \end{cases}$$